应用泛函分析引论

张鸣歧　编

北京理工大学出版社

应用泛函分析引论

张 鸣 歧 编



北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书共分七章及四个附录，内容包括集合与映射、点集论、度量空间、线性赋范空间与巴拿赫空间、内积空间和希尔伯特空间、线性算子谱论简介、泛函极值以及实数论、测度论、勒贝格积分等，前六章并附有习题。本书可作高等学校工科硕士研究生的教材和理工科本科生泛函分析选修课教材，也可供有关专业教师和工程技术人员参考。

应用泛函分析引论

张 鸣 歧 编

*

北京理工大学出版社出 版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

海军航空工程学院印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　9.75印张　227千字

1989年4月第一版　　1989年4月第一次印刷

印数：1-3500册

统一书号：ISBN 7—81013—229—6/O.37　　定价：2.75元

前　言

（一）

泛函分析是现代数学的一个重要分支，它起源于古典分析。它的历史虽然不长，但发展很快。其基本概念建立于本世纪初直到二十年代，而作为数学中一门独立的学科则形成于卅年代，其理论到六十年代发展趋于成熟。现在，泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，如微分方程、概率论、计算数学、量子场论、统计物理、现代控制论等方面。在现代科技资料中，也日益广泛地使用了泛函分析的概念、术语、记号和方法。这足以说明，泛函分析不但是数学工作者而且也是高级工程技术人员所必须具备的数学基础知识。

由于本课程是为我院多个不同类型（工科）研究生开设的，加上学时不宜超过60学时，所以，我们只能介绍泛函分析中最基础的知识。

为了使读者能顺利地接受本课程的主要内容，我们在本书前两章扼要介绍有关集合与映射，数学分析中的基本理论，测度和勒贝格（Lebesgue）积分的初步知识。编者力求在学时有限的情况下，以最精简的形式介绍泛函分析的基础知识，但仍保持这门学科的核心部分。

由于编者水平有限，时间仓促，又缺乏这门课程的教学经验，定有许多不妥，甚至错误的地方，请读者批评指正。

（二）

本书于1985年和1986年曾二次油印，在85、86、87级研究生《应用泛函》课程讲用，经过三期的教学实践，符合当前全国工科研究生关于开设《泛函分析》的教学要求。考虑到纯数学的系统性以及更好地弥补读者未学过《数学分析》、《实变函数》的不足，将原讲义的第二章有关实数理论，测度论以及勒贝格积分的内容作了适当的充实而放进附录之中，现在的第二章主要介绍点集论。此外增加了第七章泛函的极值。至于其它有些章节小的变动，就不在此一一赘述了。

本书第二稿完成后，呈蒙原北京工业学院胡钦训教授非常认真地审阅了全文。谨向他表示衷心的感谢。

编　者

1987年9月于

海军航空工程学院

目　录

第一章 集合与映射

在现代数学中，人们已经越来越广泛而深入地用到集的概念。集合论重要文献首先是德国数学家康脱(G·Cantor)在上一世纪末发表的，后来逐步发展为数学的一个分支，集合论的某些概念和结果已成为近代数学中许多分支的基础。

§1·1 集和集的运算

1.集的概念

我们把一定场合所考察、研究的某些对象的全体称为一个集。例如，自然数全体、偶数全体或素数全体所形成的数集；又如 1,3,5这三个数组成的数集；平面上第一象限里点的全体所成的点集，等等。一般地说，所谓一个集，就是指具有某种特定性质P的对象的全体，其中的对象（或者说成员）称之为集的元素。集有时也称集合。

集与元素通常分别用大写拉丁字母A、B、X、Y…与小写拉丁字母a、b、c…来表示。

所谓给定了一个集A，就是指给定了集A的元素a的特性。使得任何一个元素x要末属于A，也就是“x是A的元素”，记作

$$x \in A$$

要末不属于A，也就是“x不是A的元素”，记作

$$x \overline{\in} A$$

这两者必居其一，也只有其一成立。

具有特性P的全体元素的集A也常记作

$$A=\{x|x\text{具有性质}P\}$$

例如：A是不超过10的正偶数组成的数集，则A可表示成为

$$A=\{x|\ 1<x<10,\ x\text{是偶数}\}$$

又如：全体自然数组成的集——自然数集N可以表示成

$$N=\{1,2,3,\cdots n,\cdots\}$$

不含有任何元素的集，称为空集，记作ϕ。集的元素并非一定都是数。例如A是一切在$[a,b]$上连续的函数所组成的集，常称为连续函数集，该集就不是一个数，而是连续函数。通常用$C[a,b]$表示这个连续函数集。

又例如A是一切无穷数列$\{x_n\}$所组成的集，则A的元素是无穷数列。

有时我们也把集$\{x|x\in E,\ x\text{有性质}P\}$改写成$E\{x$有性质$P\}$。例如设$f(x)$是$E$上的一个函数，$C$是个实数，我们把集$\{x|x\in E,\ f(x)\leqslant C\}$写成$E\{f(x)\leqslant C\}$。

元素与集之间有属于或不属于的关系。另外，集与集之间也有某些重要关系，其中最基本的是包含关系与相等关系。

定义 1　设A、B是两个集，如果凡属于A的元素x都属于B，也简记作

$$\forall x\in A,\ x\in B\quad(\text{或}x\in B,\ \forall x\in A)$$

我们就称A是B的子集，常记作

$$A\subset B\ \text{或}\ B\supset A$$

读作A包含于B或B包含A。

当A与B互相包含时，也即同时有

$$A\subset B,\ A\supset B$$

成立，则称A与B相等，记作$A=B$ 。

如果$A\subset B$，而B中确有元素b不属于A，称 A是B 的 真子集。为了方便，规定空集ϕ是任何 集A的 子 集， 也即 $\phi\subset A$ 。

有了相等关系就可以定义集的运算。

2. 集的运算

定义 2 设A、B是两个集，令

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或 }x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且 }x\in B\}$$

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{且 }x\overline{\in}B\}$$

称$A\cup B$是A与B的并；$A\cap B$是 A 与B的交；$A-B$是A 与B的差。

显然，$A\cup B$就是A与B的元素合并在一起组成的集；$A\cap B$就是A与B的公共元素组成的集；$A-B$是A中那些不属于B的元素组成的集。当$A\cap B=\phi$时，也称 A与B互不 相交（或互斥）。

差集$A-B$也常记作C_AB，称为B关于A的余集。在特别研究某基本集X的子集A时，C_xA也即$X-A$，可 简 记作C_A，称为A的余集。

关于集的并、交、差与余集可以用图形去表示之（见图1-1），它可帮助我们理解集的各种运算概念。

并与交的概念也可以推广到任意多个集的情形。

设$\{A_\alpha\mid\alpha\in N\}$是任意一族集，其中$\alpha$是集的指标，它在某个固定的指标集$N$中变化，由一切$A_\alpha$（$\alpha\in N$）的所有元素所组成的集称作为这族集的并，记作

$$\bigcup_{\alpha\in N}A_\alpha=\{x\mid\exists\alpha\in N,\text{使得}x\in A_\alpha\}$$

同时属于每个集A_α（$\alpha\in N$）的一切元素所组成的集，称做为这族集的交，记作

$$\bigcap_{\alpha\in N} A_\alpha=\{\,x\,|\,x\in A_\alpha,\ \ \forall\,\alpha\in N\,\}$$

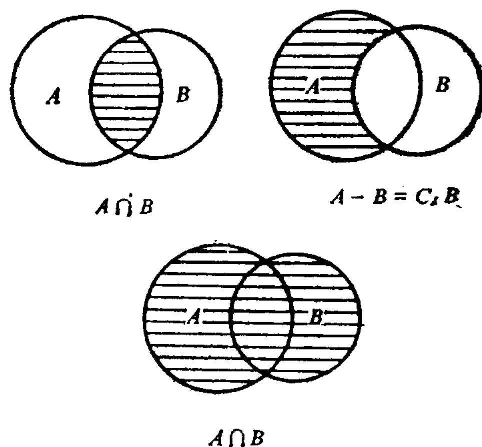


图1－1

由定义容易验证集的运算满足如下一些规律：

（1）等幂律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

（2）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

（3）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（4）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

6° 笛摩根（De－Morgan）律

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$$

$$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$$

下面仅以第一个笛摩根公式为例，来说明有关集的包含与相等式的一般证明方法。

例 求证 $C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$

〔证明〕 设$x\in C-(A\cup B)$，则$x\in C$，同时$x\bar{\in}A$，$x\bar{\in}B$，故$x\in C-A$且$x\in C-B$，可见

$$x\in(C-A)\cap(C-B)$$

这就是说明凡$C-(A-B)$中的元素都属于$(C-A)\cap$ $(C-B)$。所以

$$C-(A\cup B)\subset(C-A)\cap(C-B)$$

反之，设 $x\in(C-A)\cap(C-B)$，则 $x\in(C-A)$，$x\in(C-B)$，$x\in C$ 同时$x\bar{\in}A$，$x\bar{\in}B$，即

$$x\in C-(A\cup B)$$

这就是说凡 $(C-A)\cap(C-B)$中的元素必属于$C-(A\cup B)$。

所以 $(C-A)\cap(C-B)\subset C-(A\cup B)$

综合起来就得到

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$$ 〔证毕〕

不难将笛摩根公式推广到任意多个集合的情况：

（1） $C_A(\bigcup_{\alpha\in N}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in N}(C_AA_\alpha)$

（2） $C_A(\bigcap_{\alpha\in N}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in N}(C_AA_\alpha)$

最后顺便指出，集的运算规律体现了重要的“对偶律”，也就是当一个集的关于$\cup$、$\cap$的关系式如果成立的话，则将式

中$\cup$、$\cap$分别换成$\cap$、$\cup$所得的新关系式也是成立的。读者仔细观察上述运算性质，不难看到这种规律性。

在结束本节之前，我们引进所谓积集的概念。

设A、B是两个非空的集，$a\in A,b\in B$，所有有序元素组(a,b)为元素组成的集，记为$A\times B$，也即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$$

称$A\times B$为A与B的积集或迪卡尔积集。

显然，平面点集$R^2=R\times R$，即座标平面R^2就是实直线R与它自身的积集。

类似地定义n个集的积集，记作$\prod_{i=1}^{n}A_i$，就是

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_i$$

§1·2 映射与逆映射

映射是函数概念的推广，是研究更一般的集之间的对应关系，它也是现代数学中最基本的概念之一。

定义 1 设A、B两个非空集合，如果存在某一个法则f，使得对于A中任何一个元素x，在B中有一个确定的元素y与之对应，则称f为A到B中的映射(也称映照)，记为

$$f:A\to B$$

当映射f使y和x对应时，Y称为x在映射f下的象，记为$f(x)$，也可表示为

$$f:x\to y$$

对于任一固定的y，称适合关系$y=f(x)$的x的全体元素y在映射f之下的原象，集合A称为映射的定义域，记为$D(f)$，设C是A的子集，C中所有元素的象的全体，记为$f(C)$，称它是集C在f之下的象。$f(A)$称为映射f的值域，记为$R(f)$。

如果$f(A)=B$，就称f是A到B上的映射。显然，如果f是A到B上的映射，那末f是A到B中的映射，但其逆不真。

特别地，如果值域B是一数集（实数集或复数集），映射f就是定义在集合上的函数，如果A、B都是数集，它们之间的映射就是数学分析中研究的函数了。由此可见，映射概念就是函数概念的推广。

定义 2 设f为A到B上的一个映射，如果对每个$y\in B$，只有唯一的x满足$f(x)=y$，就称f是可逆映射。

换言之，对A中任意两个元素x_1，x_2，当$x_1\neq x_2$时，必有$f(x_1)\neq f(x_2)$，那末f就是可逆映射。

例如$(-\infty,+\infty)$上的函数$\varphi(x)=\sin x$，$\psi(x)=x^2$都不是$(-\infty,+\infty)$到$(-\infty,+\infty)$上的可逆映射。显然任何一个严格单调函数都可以看成它的定义域到值域中的可逆映射，又如$(0,1)$上的函数

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

是$(0,1]$到$[0,1]$中的可逆映射。

定义 3 设f是A到B上的可逆映射，则称f为A到B上的一一对应的映射。

换句话说，f是A到B的一一对应映射，它意味着对于A中任何一个元素a，有唯一的$b=f(a)\in B$，而且对B中每个

元素b，必在A中有唯一的元素a，适合$f(a)=b$。

例如上面的函数$f(x)$就只是$(0,1]$到$[0,1]$中的可逆映射，而不是$(0,1]$到$[0,1]$上的一一对应。其实，任何可逆映射f一定是$D(f)$到$R(f)$上的一一对应。

定义 4 设φ为A到B中的可逆映射

$$\varphi:\quad A=D(\varphi)\to R(\varphi)\subset B$$

我们作$R(\varphi)$到$D(\varphi)$的映射ψ如下：如果

$$\varphi:\ x\to y\quad x\in D(\varphi),\ y\in R(\varphi)$$

我们令ψ：$y\to x$（由于ψ是可逆的，根据可逆映射的定义，对于每一个y,与它相对应的x是唯一的,因此ψ是定义好了的）。ψ实现了从$R(\varphi)$到$D(\varphi)$上的逆映射，我们称ψ为φ的逆映射，记ψ为φ^{-1}：

$$\varphi^{-1}:\quad R(\varphi)\to D(\varphi)$$

显然$D(\varphi^{-1})=R(\varphi)$，$R(\varphi^{-1})=D(\varphi)$。

因此，逆映射是反函数概念的推广。一个严格单调函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$可以看成映射f逆映射。

我们介绍一下映射的限制与延拓的概念。

定义 5 设f、g分别是定义域D_f、D_g到B中的映射，如果$D_f\subset D_g$，而且对于D_f中的每个元素x成立着

$$g(x)=f(x)$$

就称映射g是映射f在D_g上的延拓。反之，称f是g在D上的限制，记为$f=g\,|_{D_f}$。

显然，给定g是D_g到B的映射，则g在D_f的子集上的限制$g\,|_{D_f}$是由g与D_f所唯一地确定，但是一个映射f在更大的定义域上的延拓并不是唯一的。在许多问题中，常

要求延拓后的映射满足一定的附加条件，例如在富里叶(Fourier)级数中，要把定义在$(-\pi, \pi)$上的函数$f(x)$延拓成$(-\infty, +\infty)$上的2π为周期的函数，这时也常称为周期延拓。

§1·3 对等与基数

集合可分为两类——有限集与无限集，只含有有限多个元素的集称为有限集，其余的称为无限集。如通常所认为的那样，有限集的典型特性应该是具有一个标志其元素个数的自然数（或0），而确定有限集个数的方法是把集合中元素一个一个地“数”。这等于将集中各元素按任一方式给它们编号：$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中$i\neq j$时，$a_i$和$a_j$是不同的元素。这样就使$A$和自然数列某一段$\{1, 2, \cdots, n\}$一对一地对应起来，最后对应的一个自然数$n$显然就是$A$的元素“个数”。由此不难推知，两个有限集元素个数相同的充要条件，是它们能够和自然数列的同一段一一对应，而这又等价于这两个集彼此一一对应。我们打个比方，在一个大教室里，如果每个人都有一个座位，而且每个座位上都有一人，那末我们根本不用一个一个地去“数”，便立刻知道教室中人数和座位数是相同的。

上述的讨论虽然只适用于有限集，但是一一对应的思想却不限于有限集，它将帮助我们把元素个数的概念推广到无限集。

定义1 设A、B是两个非空集合，如果存在A到B上的一个一一对应φ，则称A和B是对等，记为$A\sim B$。此外约定

$\phi\sim\phi$ 。

例1 我们可给有限集合一个不依赖于元素个数概念的定义：集合A称为有限集，如果$A=\phi$或者A和自然数的某段$\{1,2,\cdots,n\}$对等。

例2 {正奇数全体}和{正偶数全体}对等。

例3 {自然数全体}～{正偶数全体}。

例4 区间(0，1)和全体实数R对等，这只须对每个$x\in(0,1)$，令$\varphi(x)=\mathrm{tg}(\pi x-\frac{\pi}{2})$ 。

例3和例4说明，一个无限集可以和它的一个真子集对等，这一性质正是无限集的特征，它对有限集来说是不成立的。由此可以看到无限集与有限集之间的深刻差异。

对等关系显然有以下基本性质：

(1) 自反性 $A\sim A$；

(2) 对称性 $A\sim B$ 则$B\sim A$；

(3) 传递性 $A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$ 。

根据以上性质，我们可把彼此对等的集合归做一类。这样任何集合总属于某一类，我们把两个彼此对等的集合称为具有相同的基数（亦称势），用$\overline{\overline{A}}$表示集合A的基数。

基数概念可以看作有限集合中所含元素个数的推广。要对基数下一个精确的定义是一件相当复杂的事情，严格的定义需要很多准备知识。

定义 2 设A、B两个集合，如果A不和B对等，但存在B的真子集B^*，有$A\sim B^*$，则称A比B有较小的基数（或B比A有较大的基数）并记为$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$（或$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$） 。

任何两个集合A、B，在

$$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$$

中只有一个成立。

§1·4　可列集与不可列集

在本节中我们将讨论无限集中最简单同时也是最常用的一类集合，即那些和全体自然数所成之集对等的一类集合。

由于N可按大小顺序排成一无穷序列：

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

因此，一个集A是可列集的充要条件为：A可以排成一个无穷序列

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

关于可列集有以下常用的性质。

定理 1　任何无限集至少包含一个可列子集。

〔证明〕　设M是一个无限集，因$M\neq\phi$，总可以从M中取一元素把它记为e_1，由于M是无限集，故$M-\{e_1\}\neq\phi$，于是又可以从$M-\{e_1\}$中取一元素，记它为e_2，显然$e_2\in M$，$e_1\neq e_2$，设已从M中取出n个这样的互异元素$e_1,e_2,\cdots,e_n$，由于M是无限集，故$M-\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\neq\phi$，于是又可从$M-\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$中取一元素，记它为$e_{n+1}$，显然$e_{n+1}\in M$且和$e_1,e_2,\cdots e_n$都不相同，这样由归纳法，我们就得到$M$中的一个无限子集$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$，它显然是一个可列集。

该定理说明可列集的一个特征：它在所有无限集中有最小的基数。

定理2　可列集的任何子集或者是有限集或者是可列集。

〔证明〕　设A为可列集，它的元素编号如下：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

任取A的非空子集B，B中元素显然是上述序列中的一个子序列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_k}, \cdots$$

指标$n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$之中，如果有最大数，那末$B$就为一有限集，否则$B$为一无限集，当$B$是无限集时，把$a_{n_k}$与自然数$k$对应就知道$B$是可列集。

定理 3 可列个可列集的并是可列集

〔证明〕 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是可列个可列集，

令 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，记

$$
\begin{array}{l}
A_1 = \{ a_{11}, \ a_{12}, \ a_{13}, \ a_{14}, \ \cdots \} \\
A_2 = \{ a_{21}, \ a_{22}, \ a_{23}, \ a_{24}, \ \cdots \} \\
A_3 = \{ a_{31}, \ a_{32}, \ a_{33}, \ a_{34}, \ \cdots \} \\
A_4 = \{ a_{41}, \ a_{42}, \ a_{43}, \ a_{44}, \ \cdots \} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

我们可以依上面表中箭头所示的方向顺序将A的全体元素一个不漏地排列成无穷序列的形式

$$A = \{ a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, \cdots \}$$

如果其中有元素重复出现的话，可把后面重复出现去掉，即可看出A的元素能用自然数编号，因而$A \sim N$，也就是说A是可列集。

推论 有限个或可列个有限集的并是有限集或可列集。

同样可以证明下述定理。

定理 4 有限个可列集的积集是可列集。

例 1 平面上在直角座标系下，两座标x、y均为整数的点（x,y）（称为格点）全体成一可列集。

事实上，对每个固定的整数n，$A=\{(n,m)|m$是整数$\}$，是一可列集。显然，全平面上的格点全体就是并集 $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}A_n$，这是可列个可列集之和，因而是可列集。

例 2 有理数全体成一可列集。

事实上，有理数 r 可写成既约分数p/q，p、q均为整数，$b>0$。改变一下记号，把既约分数p/q与平面上格点(q,p)对应。由定理3知这种格点（q、p）的全体至多是可列集；又由于有理数全体是无限集，所以有理数全体确是可列集。

例 3 整系数多项式全体是可列集。

事实上，对于固定的自然数n，n次整系数多项式全体可以与$n+1$个自然数集的乘积对等，所以它是可列集，从而各次整系数多项式全体是可列集。

到现在为止，在无限集中我们只讨论了可列集，但是在无限集中不可列集是大量存在的，而且也是很重要。

例 4 全体实数所成之集R是一不可列集。

〔证明〕 由§1.3例4知$R\sim(0,1)$，我们只要证明$(0,1)$不是可列集就行了。首先$(0,1)$中每一个实数a都可以唯一地表示为十进位无穷小数：

$$a=0.a_1\ a_2\ a_3\ \cdots$$

的形式，其中各a是$0,1,\cdots,9$中的一个数，不全为0，且不以9为循环节，我们称实数的这种表示为一个正规表示。反之，每一个上述形式的无穷小数都是（0,1）中某一实数的正规表示。

用反证法，假设(0，1)中的全体实数可排列成一个序列

$$(0,1)=(a^{(1)},\ a^{(2)},\ a^{(3)},\ \cdots)$$

将每个$a^{(n)}$表示成正规的无穷小数：

$$a^{(1)}=0.a_1{}^{(1)}a_2{}^{(1)}a_3{}^{(1)}\cdots$$

$$a^{(2)}=0.a_1{}^{(2)}a_2{}^{(2)}a_3{}^{(2)}\cdots$$

$$a^{(3)}=0.a_1{}^{(2)}a_2{}^{(3)}a_3{}^{(3)}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

现在设法找一个与所有这些实数不同的实数。为此，利用对角线上的数字 $a_n{}^{(n)}(n=1,2,\ \cdots)$作一无穷小数如下：

$$0.a_1a_2a_3\cdots,\ 其中a_n=\begin{cases}1 & 如果a_n{}^{(n)}\neq 1\\ 2 & 如果a_n{}^{(n)}=1\end{cases}$$

则此无穷小数既不全是0，也不以9循环，因此必是(0,1)中某一实数a的正规表示，但从这个无穷小数的作法可知，它与每一个$a^{(n)}$的正规表示不同（因为至少第n位小数不同）。因此 $a\neq a^{(n)}(n=1,2,3,\cdots)$，从而 $(0,1)\neq(a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)},\cdots\}$ 与假设矛盾。因此(0,1)是不可列集 。

由此还不难推出(0,1)上的无理数集是不可列集。

习　题

1\. 证明 (1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

2\. 证明 (1) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

(2) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$

(3) $(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$

(4) 问$(A-B)\bigcup C=A-(B-C)$ 成立的充要条件为何?

3. 证明

(1) $(\bigcup_{\alpha\in N}A_\alpha)-B=\bigcup_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$

(2) $(\bigcap_{\alpha\in N}A_\alpha)-B=\bigcap_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$

4. 证明三维空间R^3中座标都为有理数的点的全体是可列集。

5. 证明所有系数为有理数的多项式的全体是一可列集。

6. 证明区间$[a,b]$上单调函数的不连续点的全体至多为可列集。

7. 证明$[0,1]$上无理数集是不可列集。

第二章　点集

在本章中，我们将要研究点集，就是说，来研究以数轴上或任意n维空间的点为元素的那种集。因为全部实数所组成的集与数轴上全部的点所成的集之间有一一对应关系，所以线性点集的研究亦即直线上的点所成之集的研究，与实数所成之集的研究完全一致。

§2·1　基本概念

我们用R表示实数的全体所成之集，也就是实直线。

直线上常用的一种点集是区间，区间有以下几种：

数轴上所有满足不等式$a \leqslant x \leqslant b$的点$x$所成之集称为闭区间$[a,b]$。

数轴上所有满足不等式 $a<x<b$ 的点x所成之集称为开区间(a,b)。

所有使得不等式$a<x\leqslant b$ 成立的点所成之集叫做半开区间$(a, b]$；同样，用不等式$a\leqslant x<b$定义半开区间$[a,b)$。

用同样的方法可以将区间的概念推广到n维空间R^n中去。

下面着重于一维空间R引进一些基本概念。

定义 1　设x_0是直线上的一点，包含x_0的任何一个开区间(α, β)称做x_0的一个邻域。特别，如果δ是一个正数，称$(x_0-\delta, x_0+\delta)$为x_0的δ邻域，记为$u(x_0,\delta)$[或记为$u_\delta(x_0)$]。

设A是直线上的一个不空的点集，$x_0 \in A$，如果存在x_0的邻域$u(x_0, \delta) \subset A$，则称x_0是A的一个内点。

定义 2 设A是一点集，$x_0 \in R$（x_0可以属于A，也可以不属于A），如果在x_0的任何一个邻域$u_\delta(x_0)$中，总含有集A中异于x_0的点，即$(u_\delta(x_0) - \{x_0\}) \cap A \neq \phi$，则称$x_0$为点集$A$的聚点（或称极限点）。

显然，一个点集的内点都是这点集的聚点。又如当

$$-\infty < a < b < +\infty$$

时区间(a,b)的端点是这区间的聚点。

例1 点集$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$以0为极限点。

聚点的定义有多种等价的形式。我们来证明下述引理。

引理 设A是一点集，x_0为R中的一点，那末下面三个陈述是等价的：

(1) x_0是A的聚点；

(2) x_0的任一邻域内必含有A中的无限个点。

(3) A中存在点列$\{x_n\}$，$x_n \neq x_0$，$(n= ,2,\cdots)$，使$x_n \to x_0$。

〔证明〕 只要从(2)推出(1)，由(1)推出(3)，再由(3)推出(2)，那末它们就彼此等价了。

(2)⇒(1)：设x_0的任一邻域$u_\delta(x_0)$内含有A的无限多个点，自然含有不同于x_0的点，所以x_0是A的聚点。

(1)⇒(3)：设x_0是A的聚点，那末对每个正整数n，必有$x_n \neq x_0$，$x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A$，就是说，有$A$中不同于$x_0$的点列$\{x_n\}$，适合

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

因此，$x_n \to x_0$，故（3）成立。

（3）⇒（2）：设x_0适合（3）。这时点列$\{x_n\}$中必有无限多项彼此互异。因为如果点列$\{x_n\}$只由有限多个点组成，必有一个点a在其中重复无限次，然而$x_n \to x_0$，那末应该$a = x_0$，但是这与$x_n \neq x_0$矛盾。

设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$互异的点组成的子序列，设$u(x_0, \delta)$是任一邻域，由于$x_{n_k} \to x_0$（$k \to \infty$），所以有自然数k_0，当$k > k_0$时，$x_{n_k} \in u(x_0, \delta)$。这就是说，$u(x_0, \delta)$内含有$A$中无限多个点。

〔证毕〕

正如上述证明中最后一步所说，当x_0是集A的极限点时，还可以把条件（3）加强，得到下面的推论：

推论 如果x_0是A的聚点，则在A中可选出各项不同的点列$\{y_k\}$，而且$y_k \neq x_0$，$k = 1, 2, \cdots$，使得$y_k \to x_0$（$k \to \infty$）。

〔证明〕 只要取y_k是引理证明中最后一步所说的x_{n_k}，$k = 1, 2, \cdots$就行了。

下面给出聚点存在的一个充分性定理。

定理1 波尔察诺－维尔斯德拉斯(BoLzano－Weiretrass)**定理**任一有界无限集A，都至少有一个聚点。

〔证明〕 因A有界，不妨设$A \subset [a, b]$。

把$[a, b]$两等分，则在$[a, b]$中至少有一半包含集A中无限多个点，即至少有一个记它为I_1，使得$A \cap I_1$是无限集；

再把I_1两等分在左右两个小区间中至少有一个，记它为I_2，使得$A \cap I_2$是无限集；

依此法继续下去，可得到一个闭区间序列$\{I_n\}$满足：对

一切$n=1,2,\cdots$都有

（1） $[a,b]\supset I_n\supset I_{n+1}$ ；

（2） $|I_n|=\frac{1}{2^n}(b-a)\to 0 \quad (n\to\infty)$；

（3） $A\cap I_n$总是无限集。

根据闭区间套原理，存在唯一的一点ξ属于所有的I_n 。

我们现在来证明，ξ也就是集A的一个聚点。事实上，我们现取ξ的一个任意小的邻域，就是说，取一个包含ξ的任意小的区间(α,β)。显然，当n充分大时，$I_n=[a_n,b_n]$将包含在区间(α,β)之内，因为$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$，且当$n\to\infty$时，$b_n-a_n\to 0$，但$I_n$包含有$A$中无限多个点，因而$(\alpha,\beta)$也包含有无限多个点。

由是，在ξ的任一邻域内皆包含有A中无限多个点。因之，ξ是A的聚点。 〔证毕〕

所给的集A为有界这一条件乃是一个主要的条件，没有这一条件，定理就不成立。例如，我们已经看到，无限无界集就没有聚点。

同时，也存在具有聚点的无界无限集。例如直线上的点的全体所成的集就是这种集。因此，无限集的有界性这一条件只是它有聚点的充分条件，但非必要条件。

聚点原理用于研究序列，我们有如下重要定理。

定理 2 波尔察诺－维尔斯特拉斯收敛子列原理 任何有界序列必有收敛子列。

〔证明〕 考察由序列$\{x_n\}$组成的点集$A=\{x_n\}$，注意，作为点集时，A可能是有限集，假如A是有限集，则其中至少有一元素在序列$\{x_n\}$中无限次地重复出现，因此，定理结论是显然成立。

若A是无限集，因$\{x_n\}$有界，A必为有界无限集，由聚点原理，至少有一个聚点$\xi\in A$，所以，对任意的n，$A\cap u(\xi, \frac{1}{n})$都是无限集。因此，可取

$$x_{n_1}\in A\cap u(\xi, 1)$$

再取　　$x_{n_2}\in A\cap u(\xi,1/2)$；且使$n_2>n_1$

然后再取　　$x_{n_3}\in A\cap n(\xi,1/3)$，且使$n_3>n_2$

依此法可得　$\{x_n\}$的一个子序列$\{x_{n_k}\}$，显然有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$$

和聚点相对立的是孤立点。

定义 3　设A是R中一点集，$x_0\in A$。如果x_0有一邻域(α,β)，其中除x_0外不含有A的点，即$((\alpha,\beta)-\{x_0\})\cap A=\phi$，称$x_0$是$A$的孤立点。如果不空的点集$A$中每一点都是孤立点，称$A$是孤立点集。

显然，点集A的孤立点不能是A的聚点，聚点也决不能是孤立点。因此A的内点不是孤立点。从孤立点的定义知道，对于R中的点集A的任何一点x_0，如果x_0不是集A的聚点，那末必是A的孤立点。例如集$\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$之中每个点都是这个集的孤立点，这个集就是孤立点集。

例 2　空集没有聚点。

例 3　有限点集或发散到无穷远的点列所成的点集没有聚点，所以是孤立点集。

例 4　以R_0表示区间$[0,1]$中的有理数全体。那末区间$[0,1]$中任何一点都是R_0的聚点。除此之外，R_0没有任何其

它的聚点。

例5 闭区间$[0,1]$聚点全体，就是$[0,1]$。

这些例子说明了R中点集的聚点的各种可能的情况：

（1）没有聚点；

（2）一个点集的聚点可以都不属于这个点集；

（3）一个点集A的聚点可以一部分在A中，另一部分不在A中，甚至聚点比本身的点还多；

（4）一个点集本身同时就是它自己的聚点全体。后面还要进一步分析点集和它的聚点的关系。

§2·2 开集·閉集

在本节中我们着重讨论两类特殊点集。

定义1 设G是R中的一个不空的点集。如果G中每一点都是G的内点，称G是开集。

例如，任何开区间(α,β)是开集。我们规定空集是开集。

开集的基本性如下。

定理1 （1）空集ϕ和全空间R是开集；

（2）任意一族开集的并集是开集；

（3）有限个开集的交是开集。

证明（1）是显然的。现在来证明（2）。

设$\{G_\alpha\}$是一族开集，要证$G=\bigcup\limits_{\alpha\in N}G_\alpha$是开集。由开集的定义，只须对于$G$中任意一点$x$证明存在邻域$u_\delta(x)\subset G$就可以了。

当$G=\phi$时，不必证明了。若$G\neq\phi$，任意$x\in G$，必有$\alpha_0\in N$ 使$x\in G_{\alpha_0}$，因G_{α_0}为开集，必存在x的一个

邻域$u_\delta(x)$，使得

$$u_\delta(x)\subset G_{\alpha_0}\subset G$$

所以x为G的内点，故G是开集。

最后证明（3）　设G_1，G_2，…，G_n是n个开集。令 $G=\bigcap_{i=1}^{n}G_i$，我们只要考虑G不是空集的情况。任意取$x\in G$，那末 $x\in G_i,i=1,2,\cdots n$，因为G_i是开集，所以存在x的邻域$u_{\delta_i}(x)$，使得 $u_{\delta_i}(x)\subset G_i$，$i=1,2,\cdots n$，。

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$，从而

$$u_\delta(x)\subset\bigcap_{i=1}^{n}u_{\delta_i}(x)\subset\bigcap_{i=1}^{n}G_i=G$$

也即x是G的内点，所以G是开集。〔证毕〕

在定理1的（2）中，"任意个开集"，既可以是有限个也可以是无限个。但是（3）中如果把"有限个开集"改为"无限个开集"，那末它们的交集就不一定是开集了。

例如 $G=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$，$n=1,2,\cdots$

显然它们的交集$G=\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\{0\}$，即$G$是含有一点0的集，它不是开集。

下面我们引进闭集的概念同时进一步分析点集和它的聚点关系，为此，引入如下的概念。

定义 2　点集A的聚点的全体所成之集称为A的导集，记为A'。

没有聚点的点集，它的导集是空集。因而空集的导集是空集。

定义 3　如果点集A的聚点全部属于A，即$A'\subset A$，称点集A是闭集。

因此，如果点集A没有聚点，那末A是闭集，从而空集是闭集，易知闭区间是闭集。

从下面的定理2看出，闭集是对于极限运算封闭的点集。

定理 2　点集A为闭集的充要条件是：集A中任何一个收敛点列必收敛于A的一点。

〔证明〕　必要性：设A是一个闭集，$\{x_n\}$是A的一个收敛点列，且　$x_n\to x_0$，我们要证　$x_0\in A$。如果有$x_n=x_0$，那末自然$x_0\in A$。如果对一切n，$x_n\neq x_0$，由§2.1引理的(3)知x_0是A的聚点，于是$x_0\in A'\subset A$。　所以必须$x_0\in A$。

充分性：设A中任何一个收敛点列必收敛于其中一点，对于A的任何一个聚点$x_0\in A'$，由§2·1引理，有A中的收敛点列$\{x_n\}$收敛于x_0，由假设$x_0\in A$，所以$A'\subset A$。A是闭集。　〔证毕〕

定理 3（开集与闭集的对偶性）　设A是开集，则CA是闭集；设A是闭集，则CA是开集。即闭集的余集是开集，开集的余集是闭集。

〔证明〕　第一部份：设A是开集，而x_0是CA的任意一聚点，那末x_0的任一邻域都有不属于A的点。这样，x_0就不可能是A的内点，从而$x_0\overline{\in}A$(因A是开集)，也就是$x_0\in CA$，所以CA是闭集。

第二部份：设A是闭集，对任一$x_0\in CA$，假如x_0不是CA

的内点，则x_0的任一邻域内至少有一个属于A的点，而且这点又必异于x_0，这是因为$x_0 \in CA$，这样x_0就是A的聚点。因A是闭集，从而x_0必属于A，这和假设矛盾，因而结论成立。 〔证毕〕

由于开集和闭集的这种对偶关系，在许多情形下，我们将闭集看作是由开集派生出来的一个概念。也就是说，如果定义了开集，闭集也就随之而确定。下面我们利用定理3证明下面闭集的性质。

定理 4 (1)空集ϕ和全空间R是闭集；

(2)任意一族闭集的交是闭集；

(3)有限个闭集的并集是闭集。

〔证明〕设F_i，$i \in N$(或$i = 1,2,\cdots,n$)是闭集，则由定理3知各CF_i是开集，从而由定理1知$\bigcup_{i \in N} CF_i$（或$\bigcup_{i=1}^{n} CF_i$）也是开集，由笛摩根公式有

$$\bigcap_{i \in N} F_i = C(\bigcup_{i \in N} CF_i)$$

或

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = C(\bigcap_{i=1}^{n} CF_i)$$

再利用定理3便知$\bigcap_{i \in N} F_i$或$\bigcup_{i=1}^{n} F_i$是闭集。 〔证毕〕

注意，任意多个闭集的并不一定是闭集。

例如， $F_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$， $n = 3,4,\cdots$

则F_n是闭集，而 $\bigcup_{n=3}^{\infty} F_n = (0,1)$不是闭集。

最后我们指出，不要把开集与闭集看成两个完全对立的概念。我们已经知道空集同时又是开集又是闭集。又如集

$F=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}\cdots\}$既不是开集也不是闭集。

因此，一个集可能又是闭集又是开集，也可能同时又不是开集也不是闭集。

§3·2　开集和閉集的构造

在直线上（即R中），开区间是开集。开集虽然一般地不一定是一个区间，但容易看出非空开集是一系列开区间的并集。我们现在来研究直线上的开集的结构。先引入构成区间的概念。

定义1　设G是直线上的开集。如果开区间$(\alpha,\beta)\subset G$、而且端点α,β不属于G，那末称(α,β)为G的一个构成区间。

例如开集$(0,1)\cup(2,3)$的构成区间是$(0,1)$及$(2,3)$。下面给出开集的构造定理。

定理1　直线上任意非空开集可以表示成有限个或可列个互不相交的构成区间的并集。又当非空开集表示成互不相交的开区间的并集时、这些开区间必是构成区间。

〔证明〕　设G是一非空开集，分以下步骤来论证。

（1）开集G的任何两个不同的构成区间必不相交。不然的话，设(α_1,β_1)、(α_2,β_2)是G的两个不同的构成区间如相交。这时必有一个区间的端点在另一个区间内。例如$\alpha_1\in(\alpha_2,\beta_2)$，但$(\alpha_2,\beta_2)\subset G$，这和$\alpha_1\overline{\in}G$矛

盾。因此不同的构成区间不相交。

(2)非空开集最多只有可列个构成区间，这是因为从每个构成区间中可取一有理数作为该构成区间的代表，而不同的构成区间互不相交，故所取有理数不会重复。因而可使构成区间与有理数的一个子集成一一对应，故构成区间至多是可列个。

(3)开集G的每一点都对应有一个构成区间。事实上，任取$x_0 \in G$，由开集定义，存在开区间(x, y)使$x_0 \in (x, y) \subset G$。显然，这种开区间有无限多个，把它们的并记为U，那么可以证明，U是含有x_0的这种区间的最大者，也就是说它是G的构成区间。令$U = (\alpha、\beta)$，显然$(\alpha, \beta) \subset G$，现在要证明$\alpha \overline{\in} G$、$\beta \overline{\in} G$，假如不然，$\alpha \in G$，则有$\delta > 0$，使$(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset G$，从而$(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset G$，从而$(\alpha - \delta, \beta) \subset (\alpha, \beta)$，而$\alpha - \delta < \alpha$，这就和$\alpha$是区间左端点下界相矛盾。所以$\alpha \overline{\in} G$，同样有$\beta \overline{\in} G$。所以$(\alpha, \beta)$是$G$的构成区间。

(4)作G的所有构成区间的并$\bigcup(\alpha, \beta)$，由(3)它应是G，由(1)G必定是有限个或可列个互不相交的构成区间的并集。用(α_i, β_i) $(i = 1, 2, \cdots)$记G的构成区间，那末$G = \bigcup\limits_i (\alpha_i, \beta_i)$。

(5)设$G = \bigcup\limits_i (\alpha_i', \beta_i')$是一组互不相交的开区间的并集。现在只要证明每个$(\alpha_j', \beta_j')$都是$G$的构成区间，比方说$\alpha_i' \in G$，那么必有$i \neq j$，使得$\alpha_i' \in (\alpha_j', \beta_j')$因而$(\alpha_i', \beta_i')$与$(\alpha_j', \beta_j')$相交，这和假设矛盾。所以$\alpha_i' \overline{\in} G$，同样$\beta_i' \overline{\in} G$，所以$(\alpha_i', \beta_i')$是构成区间。

〔证毕〕

因此，非空开集必然唯一地表示成有限个或可列个互不相交的开区间的并集。

既然闭集的余集是开集，那末从开集的构造可以引入余区间的概念。

定义 2 设 A 是直线上的闭集，称 A 的余集 CA 的构成区间为 A 的余区间或邻接区间。

我们又可以得到闭集的构造如下。

定理 2 直线上的闭集 F 或者是全直线，或者是从直线上挖掉有限个或可列个互不相交的开区间（即 F 的余区间）所得到的集。

§2·4 完全集·稠密集

本节再进一步分析点集和它的聚点的关系。

定义 1 如果 $A\subset A'$，就称 A 是自密集。换句话说，当集中每点都是这个集的聚点时，这个集是自密集；另一种说法就是没有孤立点的集就是自密集。

如果 $A'=A$，称 A 是完全集（或称完备集）。完全集就是自密闭集，也就是没有孤立点的闭集。

例如闭区间$[\alpha,\ \beta]$（$\alpha<\beta$），空集及全空间 R 都是完全集。

由孤立点的定义很容易知道，直线上点集 A 的孤立点必是包含在 A 的余集中的某两个开区间的公共端点。因此，闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点。完全集是没有孤立点的闭集，所以，完全集就是没有相邻接的余区间的闭集

我们知道，任何两个实数之间存在有理数，换句话说，

任何一个实数都是有理数的聚点。我们说这是有理数的稠密性。一般地，我们引进下述定义。

定义 1 设A、B是R中两个点集，如果B中每个点的任一邻域中必有A的点，那末称A在B中稠密当$B=R$时，即A在R上(即A在全直线上)处处稠密，称A是稠密集。

例如〔0,1〕中的有理数全体在〔0,1〕中稠密，而直线上有理数全体(记为Q)是稠密集。

定义 2 设A是R中点集，称$A\cup A'$为A的闭包，记为$\overline{A}$。

这样，我们还可以用闭包概念来描述稠密性的定义。从§2·1引理立即可以得到

定理 1 （1）A在B中稠密的充要条件是$\overline{A}\supset B$。

（2）A在B中稠密的充要条件是对任一$x\in B$，有A中的点列$\{x_n\}$，$x_n\to x\ (n\to\infty)$

定理 2 点集A成为闭集的充要条件是$A=\overline{A}$。

〔证明〕 如果$A=\overline{A}$，那末$A'\subset\overline{A}=A$，所以A是闭集。反之，如果A是闭集，那末$A'\subset A$，所以$\overline{A}=A\cup A'=A$

〔证毕〕

和稠密性相对立的概念是疏朗。

定义 3 设S是R中点集。如果点集S在每个不空的开集中都不稠密，就称S是疏朗集，或称无处稠密集。

点集S是疏朗集的充要条件是在任何开区间(α,β)中存在开区间$(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$，在$(\alpha',\beta')$中没有$S$中的点。我们还可以得出下面的结果：

疏朗集A的余集CA一定是稠密集。事实上，若$(\alpha,$

β ）是任意一个开区间，其中至少有一个子区间（α'，β'）不含A中的点，即（α'，β'）含有CA的点，换言之，（α，β ）中含有CA中的点，所以余集CA是稠密集。

§2·5 哥西(Cauchy)点列与点集的完备性

大家知道，单调有界序列必有有限极限，即单调有界序列必收敛，但是反之未必，因为收敛点列未必是单调的，那末收敛序列的本质特征是什么呢？

考察一下收敛序列$\{x_n\}$，$x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 。由极限定义，对任意给的正数ε，存在着正整数N，使得当m、$n > N$时

$$|x_m - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_0| + |x_n - x_0| < \varepsilon$$

这就是说，收敛序列必定是这样一个序列：对任意给定的正数ε，必有某个项数$N(\varepsilon)$ 存在，使它的第N项后的任意两项之差的绝对值都小于预先指定的正数ε。这正是收敛序列的基本特征性质。为此，抽象出哥西点列的概念。

定义1 若点列$\{x_n\}$满足：对任意给定的正数ε，存在着正整数N，使得当m、$n > N$时，总有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$是一哥西点列．或称基本点列。

定理 （哥西收敛原理） R中点列$\{x_n\}$收敛的充要条件：$\{x_n\}$是一哥西点列。

〔证明〕 必要性已经证过了，现在来证明充分性：R中哥西点列都是收敛的。

设$\{x_n\}$是哥西点列，因此，它必为有界的，从而由维

尔斯德拉斯收敛子序列原理，有收敛子序列$\{x_{n_k}\}$，且不妨设$x_{n_k}\to x_0$　$(n\to\infty)$，我们要证明$x_n\to x_0$$(n\to\infty)$。

事实上，$\{x_n\}$为哥西点列，对任意$\varepsilon>0$，存在N_1，使当m，$n>N_1$时，有$|x_m-x_n|<\varepsilon/2$。又有$N(>N_1)$，使当$n_k>N$时，有$|x_{n_k}-x_0|<\varepsilon/2$（这是因为$x_{n_k}\to x_0$），从而当$n>N$时$(n_k>N)$，有

$$|x_n-x_0|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-x_0|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

也即　$x_n\to x_0$　$(n\to\infty)$。

由此可知，要判断一个点列是否收敛，只要看一看是否是哥西点列就行了。值得注意的是，哥西点列概念本身并不需要知道其极限是什么，它完全用点列本身性质来描述的。用它判断收敛性与极限定义是根本不同的，它在理论分析论证中是极其重要的。

另外，要指出的是，收敛原理是指实数集R的范围而言的，也就是说，在R中收敛点列与哥西点列两个概念是等价的。但如果限制在有理数集Q范围内情况就不是这样了，由有理数组成的哥西点列未必都以有理数为其极限，即在Q中它就不一定收敛了。因此，有理数集Q中收敛点列与哥西点列两个概念就不再等价了。这是实数集R与有理数集Q的根本不同点。通常因此称R是完备的，而Q是不完备的。点集的完备性严格定义如下。

定义 2　A是R中的点集，如果A中任何哥西点列都在A中收敛，则称集A是完备的否则称A是不完备的。

例如区间(0,1)和区间(0,1)等都不是完备的。事实上$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$是其中的哥西点列，但在(0,1)或(0,1)中都没有它的极限。但是只要在(0,1)或(0,1)中添上一些点，使它成为闭集，例如取它们的闭包得到闭集$[0,1]$，就成一个完备的点集了。

完备性的概念是十分重要的基本概念，R的完备性是R的根本特征之一，下一章我们将它推广到更一般的抽象空间中去。

§2·6 点集的确界与确界存在原理

设A是直线上的点集，如果存在有限数a，使得对于一切$x\in A$，都有$a\leqslant x$，则称A是下有界的。如果存在有限数b，使得对于一切$x\in A$，都有$x\leqslant b$，则称集A是上有界的。

若集A既是上有界，又是下有界，就是说，存在着点a及b，使得对于一切$x\in A$，都有$a\leqslant x\leqslant b$，则称A为有界集。

当集A上（或下）有界时，A的上界（或下界）不是唯一的。但是A的最小的上界（或最大的下界）如果存在的话，它们都是唯一的。我们引进如下定义：

定义1 设A是一点集，m是一有限数，如果具有下述两个条件：

(1)对一切$x\in A$，$x\geqslant m$；

(2)对任何正数ε，必有$x\in A$使得$x<m+\varepsilon$，我们称m是A的下确界。记为 $m=\inf A$.。

若数M具有下述两个条件：

(1)对一切 $x\in A$，$x\leqslant M$；

(2)对任何正数 ε，必有$x\in A$使得$x>M-\varepsilon$，我们称M是A的上确界，记为 $M=\sup A$ 。

如果A不是有下界的，规定A的下确界是$-\infty$，记为 $\inf A=-\infty$ 。同样地，如果A不是有上界的，规定A的上确界是$+\infty$，记为 $\sup A=+\infty$ 。一个集A有上（下）确界的话，它未必定属于这个集A。

例如 设$A=(0,1]$

$$B=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \cdots\right\}$$

易知 $\inf A=0\overline{\in}A$， $\sup A=1\in A$

$\inf B=0\in B$， $\sup B=1\overline{\in}B$

我们还须注意上下确界与最大、最小值的区别及联系。

不难明白，A有最大值（或最小值）时，则A的上（或下）确界必存在，且就是A中的最大值（或最小值）。但是除了A是有限集，A未必有最大值（或最小值），我们马上会明白，确界实际上就是最值概念的一种拓广。

什么条件下集A一定有上（或下）确界呢？

定理（确界存在定理） 在R中任一上（或下）有界的非空的集A，都存在唯一的上（或下）确界。

〔证明〕 就上确界的情况来证之，下确界的情形完全类似。

设A上有界，且不妨设A无最大值。因为若$\max A$存在，我们知道 $\max A=\sup A$，就不用证明了。设A有上界b，即对一切$x\in A$，$x\leqslant b$ 。

任取$a\in A$，那末$(a,b]\cap A$必是无限集，不然A就有最大值了。我们依照§1·1定理1的证明方法，可得一列闭区间序列$\{I_n\}$，满足

（1）　$[a,b]\supset I_n\supset I_{n+1}$　　$n=1,2,\cdots$；

（2）　$|I_n|=\dfrac{1}{2^n}(b-a)\to 0$　$(n\to\infty)$，

（3）　$I_n\cap A$　都是无限集。

故存在唯一的一点$\xi\in I_n$ $(n=1,2,\cdots)$且$\xi\in A'$。

下面证明　$\xi=\sup A$。

1°　对一切$x\in A$，　$x\leqslant\xi$是满足的；

2°　对于任何正数ε，有N存在使得

$$I_n\subset(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)=u_\varepsilon(\xi)$$

而$I_n\cap A$是无限集，必有$x\in A\cap I_n\subset A\cap n_\varepsilon(\xi)$，从而有$\xi-\varepsilon<x\in A$，所以$\xi=\sup A$。

由定理的证明过程可知，若A上（或下）有界，并且A没有最大（或最小）值时，则$\sup A$（或$\inf A$）必是A的最大的（或最小的）一个聚点。因此，确界与聚点有密切的联系。

§2·7　紧集

在研究实数集上的连续函数性质时，还会遇到另一重要概念——紧集。在紧集上定义的连续函数具有一系列重要的特性。

定义1　设A是R中的点集，如果在R中有一族开集$\{G_\alpha\}$，使得$A\subset\bigcup\limits_{\alpha\in N}G_\alpha$，则称集族$\{G_\alpha\}$是$A$的开覆盖。

定义2　如果A的每个开覆盖总含有一个有限子覆盖，

则称A是一个紧集。

说得更明确一些，这个要求就是：如果$\{G_\alpha\}$是A的开覆盖，那末$\{G_\alpha\}$中总可以选出有限个开集$G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}$ 使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$$

例1 有界开区间$(0,1)$，无界半闭区间$[0, +\infty)$都不是紧集。

事实上，取$\{G_\alpha\} = \left\{ \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right) \middle| n=1, 2, \cdots \right\}$显然是$(0,1)$的开覆盖，但是在$\{G_\alpha\}$中选不出有限个子覆盖，因此$(0,1)$不是紧集。

同样，$[0, +\infty)$的开覆盖$\{G_\alpha\} = \{(-1,n) | n=1,2, \cdots\}$也没有有限子覆盖，故$[0, +\infty)$也不是紧集。

那么什么样的点集才是紧集呢？读者可能会猜想到闭区间是紧集，这是对的。下面著名的海涅－鲍莱尔(Heine-Borel)定理更一般地回答这个问题。

定理（海涅-鲍莱尔定理） A是R中的紧集的充要条件A是有界闭集。

〔证明〕 必要性： 设A是紧集。先证A是有界的。事实上，因 $A \subset R = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n,n)$。即$\{(-n, n) | n=1,2, \cdots\}$是$A$的一个开覆盖，由$A$的紧性故存在某个固定的$N$，使得

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} (-n,n) = (-N, N)$$

也即A是有界集。

其次证明A是闭集，只须证CA是开集。

设 $P\overline{\in}A$，$q\in A$，分别作P，q的互不相交的邻域V_p，G_q。由于A是紧集，所以A中有有限点$q_1,q_2,\cdots,q_n$，使得

$$A\subset G_{q_1}\cup G_{q_2}\cdots\cup G_{q_n}=G$$

如果令 $V=V_{p_1}\cap V_{p_2}\cap\cdots\cap V_{p_n}$

那末V是p的一个与G不相交的邻域，因此，$V\subset CA$，从而p是CA的内点，故CA开集，A是闭集。

充分性：设A是有界闭集，不妨设$A\subset[a,b]$。假定A不是紧集，则必有A的某个开覆盖G，它没有有限子覆盖。

把$[a,b]$两等分，在其左面与右面两个小闭区间中必有一个记为I_1，使得$A\cap I_1$不能被G的有限个成员所覆盖。再等分I_1，有I_2，使得$A\cap I_2$不能被G的有限个成员所覆盖。

依此法继续下去，可得到一列闭区间$\{I_n\}$，满足

（1） $[a,b]\supset I_n\supset I_{n+1}$ $n=1,2,\cdots$；

（2） $|I_n|=\frac{1}{2^n}(b-a)\to 0$ （$n\to\infty$）；

（3） $A\cap I_n$ 不能被G有限个成员所覆盖。

由（1）（2）易知，存在$\xi\in I_n$（$n=1,2,\cdots$），且$\xi\in A'\subset A$(因A是闭集)，故对任何n，有$\xi\in A\cap I_n$，由于$\xi\in A$，必有某个$G_\alpha\in G$，使得$\xi\in G_\alpha$，由G_α是开集，必存在$\delta>0$，使得 $u_\delta(\xi)\subset G_\alpha$， 因此，$A\cap I_n\subset u_\delta(\xi)\subset G_\alpha\in G$。这就与（3）相矛盾，因此，有界闭集$A$必定是紧集。〔证毕〕

由此，我们得出如下十分有用的几个推论。

推论1 紧集的闭子集是紧集。

推论2 A是紧集的充要条件A的任一无限子集都有聚

点，并聚点属于A。

推论3 A是紧集的充要条件A的任一点列$\{x_n\}$都有收敛子列，且子列的极限都属于A。

这里我们要指出，前面介绍的聚点原理，确界存在原理以及海涅-鲍莱尔定理及其推论都是从不同角度刻划了实数集的本质属性——连续性或完备性。运用这些结果就可以建立起整个数学分析的理论，所以它们是理论上很重要的一批基本定理。

习　题

1. 证明任意点集的内点全体成一开集。

2. 证明任意点集的导集是闭集。

3. 证明（i）　$A\subset B$，$A'\subset B'$。

（ii）　$(A\cup B)'=A'\cup B'$。

4. 设$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的实值连续函数，对于任意常数α，$E=\{x|f(x)>\alpha\}$是一开集，而$E=\{x|f(x)\geqslant\alpha\}$总是闭集。

5. 证明$p_0\in A'$的充要条件是对任何含有p_0的邻域$u_\delta(p_0)$（不一定以p_0为中心）中，必有异于p_0的点$p_1\in u_\delta$（事实上，这样的p_1还有无穷多个）。

6. $x\in\overline{A}$，当且仅当对于任何正数δ，$A\cap u_\delta(x)\neq\phi$。

7. 证明开集减闭集后的差集仍是开集，闭集减开集后的差集仍是闭集。

8. 收敛数列$\{x_n\}$是否必有聚点？若$\{x_n\}$有聚点，$\{x_n\}$是否必有极限？

9.求证$\{x_n\}$收敛当且仅当$\{x_n\}$任一子列都收敛。

10.求证哥西点列必是有界点列。

11.设$f(x)$的导函数$f'(x)$在R上有界，求证f在 A 上是一致连续的。

13.判定下列函数序列的一致收敛性

(1) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}\quad 0\leqslant x\leqslant 1$;

(2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\quad 0\leqslant x<1$ 。

第三章　度量空间

本章讨论度量空间，它是泛函分析中的基本内容，可看作是一维欧氏空间的直接推广。它在泛函分析中的地位和作用相当于R在数学分析中的地位与作用。因此，度量空间的性质与理论的学习为进一步学习本课程的其它内容奠定基础。

§3·1　度量空间及其例子

首先让我们回忆数学分析中的极限概念。我们定义$\{x_n\}$的极限是x，要用绝对值$|x_n-x|$来表示x_n和x的接近程度。如果我们将实直线R任何两点a和b之间的距离$|a-b|$用$d(a,b)$加以表示，那么所谓R中点列$\{x_n\}$收敛于x，就意味着x_n和x之间的距离随$n\to\infty$而趋于0，即

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

这使我们想到，在一般的点集A中如果也有“距离”，那么在点集A中也可借这一距离定义极限，这对研究集的性质将是极重要的工具。那么，究竟什么是距离呢？

定义1　设X是非空集，若对于X中任意两个元素x,y，都有唯一确定的实数$d(x,y)$与之对应，而且这一对应关系满足下列条件：

(1)　$d(x,y)\geqslant 0, d(x,y)=0$当且仅当$x=y$；

(2)　$d(x,y)=d(y,x)$；

(3)　$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$　。

则称$d(x,y)$是x，y之间的距离，称(X,d)为度量空间或距离空间。X中的元素称为点，条件（3）称为三点不等式或三角不等式。

如果(X,d)是度量空间，Y是X的一个非空子集，则(Y,d)也是一个度量空间，称为(X,d)的子空间。

下面我们举一些度量空间的例子。

例1 n维欧氏空间R^n

对R^n中任意两点

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

规定距离如下：

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (a)$$

容易验证$d(x,y)$满足距离条件，首先条件(1)(2)显然是满足的，验证条件(3)。为此先证明哥西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \qquad (b)$$

其中a_i,b_i $(i=1,2,\cdots n)$为实数，任取实数λ则

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\lambda^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

左端是λ的二次三项式，它对λ的一切实值都是非负的，故其判别式不会大于零。即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

所以哥西不等式（2）成立，由哥西不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i^2+2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i+\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$=\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \qquad (b')$$

在R^n中任取$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，$Z=(\zeta_1$ $\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，并在（b'）中令$a_i=\xi_i-\zeta_i$，$b_i=\zeta_i-\eta_i$（$i=1$，$1,\cdots n$），立即得到三点不等式：

$$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$$

因此R^n按距离（1）是一度量空间。

在R 中，我们还可以引入如下的距离：

$$d_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant 1}|\xi_i-\eta_i| \qquad (a')$$

则d_1也满足距离的全部条件，故R 按照d_1 也是一个度量空间。

上述例1告诉我们，在一个集合中定义的距离方式不是唯一的。一般地说，如果在一个非空集X中定义了距离d与d_1，当$d(x,y)\neq d_1(x,y)$时，那么X按照距离d与按照距离d_1

所成的度量空间必须看成是不同的，在例一中，R^n按照(a)定义的距离与按照(a')定义的距离是两个不同的度量空间。

例 2　在实直线R上另外规定一种距离d_1如下，当$x,y\in R$时

$$d_1(\chi,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

显然d_1满足距离的条件（1）（2），为了证明d_1满足三点不等式，我们只要证明，对于任意的复数a,b成立着不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\qquad(c)$$

事实上，由于在实数区间$[0,+\infty)$上的函数

$$\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$$

是单调增加函数，由不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，我们得出

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|c|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

所以（c）式成立。

例 3　序列空间S

设S表示实数列（或复数列）的全体，对S中任意两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$

令

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2}}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}$$

我们来验证如此定义的$d(x,y)$满足距离条件。事实上，可以仿照例2的办法来验证它满足三点不等式。

令　$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots\zeta_n,\cdots)$　即得

$$d(x,\ y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i}}\frac{|\xi_i-\zeta_i+\zeta_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i+\zeta_i-\eta_i|}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i}}\left(\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}\right)$$

$$=d(x,z)+d(z,y)$$

例4　空间$C[a,b]$

$C[a,\ b]$表示闭区间$[a,\ b]$上实值（或复值）连续函数全体。对$C[a,b]$中任意两点x、y，定义它们的距离为

$$d(x,\ y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \qquad (d)$$

则$C[a,b]$按距离（d）成为一度量空间。事实上，距离条件（1）（2）都是明显的，我们仅验证三点不等式，设$x(t)$，$y(t)$，$z(t)\in C[a,b]$　则

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|$$

所以有

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

因此，$C[a,b]$按照距离（d）确为度量空间。

例5 l^2空间

满足 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty$ 的实（或复）数列$x=\{x_k\}$的全体称为 l^2 空间。

设 $x=\{x_k\}$，$y=\{y_k\}\in l^2$ 定义它们的距离

$$d(x, y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (e)$$

则l^2空间按距离(e)成为一度量空间，距离条件（1）（2）容易得出，现验证条件（3）成立。

对固定的n，$x^{(n)}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0\cdots)$ 和 $y^{(n)}=(y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, 0, \cdots)$都是$R^n$中元素，故对固定的$n$有哥西不等式

$$\left(\sum_{y=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2\sum_{k=1}^{n}y_k^2$$

不等式右端令$n\to\infty$即得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2+2\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k+\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

今取$\xi=\{\xi_k\}$，$\eta=\{\eta_k\}$，$\zeta=\{\zeta_k\}$，以$x_k=\xi_k-\zeta_k$，$y_k=\eta_k-\zeta_k$ 代入上式，即可将三点不等式

$$d(\xi,\ \eta)\leqslant d(\xi,\ \zeta)+d(\zeta,\ \eta)$$

例6 有界函数空间$B(A)$

设A是一给定的集合，令$B(A)$表示A上有界实值（或复值）函数全体，对$B(A)$中任意两点x、y，定义距离

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)| \qquad (f)$$

$d(x,y)$显然满足条件（1）（2），此外，对所有的$t\in A$成立

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$
$$\leqslant\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|$$

所以

$$\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|\leqslant\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|$$
$$+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|$$

即$d(x,y)$满足条件（3），特别地当 $A=[a,b]$时，记$B(A)$为$B[a,b]$。

§3·2 度量空间进一步例子

为了进一步举度量空间的例子，我们先来介绍两个重要

不等式。

引理1 （荷尔德Hölder不等式）设p、$q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，称$p,q$为对偶数，则对于任意实（或复）数组$y=\{x_k\}_{k=1}^{n}$ $y=\{y_k\}_{k=1}^{n}$都有荷尔德 不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (a)$$

〔证明〕 为了证明不等式(a)，首先证明杨格(young)不等式：p、q为对偶数，$a,b\geqslant 0$ 则有 杨格 不等式

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

不妨假设$a>b$（$a\leqslant b$情形类似证之），为此，我们考虑（x，y）平面上由方程$y=x^{p-1}$ 所定义的曲线，这曲线也可由方程 $x=y^{q-1}$ 来定义（图3-1），从图形中可见，总有面积$S_1+S_2\geqslant ab$，而面积

$$S_1=\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{a^p}{p}$$

$$S_2=\int_0^b y^{q-1}\mathrm{d}y=\frac{b^q}{q}$$

所以

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

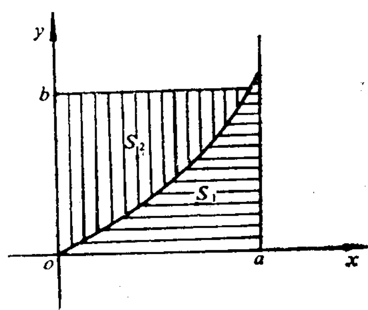


图 3 － 1

现在取

$$a_k = \frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|_p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$b_k = \frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |y^i|_q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$(k = 1, 2, \cdots n)$$

注意到 $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1$，就有 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant 1$，即

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{p\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)$$

$$+\frac{1}{q\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

所以
$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \sum_{k=1}^{n}|y^k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

在不等式两端令$n\to\infty$，得到无穷数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 情形时的荷尔德不等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y^k|^q\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (b)$$

荷尔德不等式还能推广到积分形式，设p、q互为对偶数，$p,q>1$，则对于任何$f(t)\in L^p[a,b]$，$g(t)\in L^q[a,b]$，有

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (c)$$

引理2 (**闵可夫斯基**Minkowski)不等式　设$p\geqslant 1$,则对任何数组$\left\{ x_k \right\}_{k=1}^n$, $\left\{ y_k \right\}_{k=1}^n$都有闵可夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k \pm y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (d)$$

〔证明〕 当$p=1$时，不等式显然成立。

设 $1<p<+\infty$，则有

$$\sum_{k=1}^n |x_k \pm y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k \pm y_k|^{p-1}(|x_k| + |y_k|)$$

$$= \sum_{k=1}^n |x_k||x_k \pm y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k||x_k \pm y_k|^{p-1}$$

由荷尔德不等式(a)。令 $z_k = (|x_k| \pm |y_k|)^{p-1}$，则上述不等式的右端第一项为 $\sum_{k=1}^n |x_k||z_k|$，故得

$$\sum_{k=1}^n |z_k||x_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

其中：$q=\frac{p}{p-1}$，对第二项施行同样的手续，即可得

$$\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

两端除以 $\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

由于 $\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k\pm y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$

故不等式（d）得证。

类似地亦有，当$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是无穷数列时

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k\pm y_x|^{\frac{p}{\cdot}}\right)\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (e)$$

当f，$g\in L^p[a,b]$时有积分形式的闵可夫斯基不等式：

$$\left(\int_a^b|f(t)\pm g(t)|^p\mathrm{d}t\right)\leqslant\left(\int_a^b|(ft)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (f)$$

例 1 l^p空间（$p\geqslant 1$）

由满足条件 $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi^i|^p<+\infty$的所有可能的实（或复）数列$x=\{\xi_n\}$的全体，称为$l^p$空间。

定义距离为

$$d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (g)$$

其中：$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots)$，则$l^p$是一度量空间，实际上，根据闵可夫斯基不等式（d），对任何n总有不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

按假设，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p \text{与} \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p$$

是收敛，所以，当$n\to\infty$时的极限，就有

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

从而左端的级数也收敛。这就证明了由（g）式所定义的距离满足三点不等式，当然条件(1)(2)是显然成立的。

例2 $L^p[a,b]$空间（$p\geqslant 1$）

设$x(t)$是定义在闭区间$[a,b]$上的勒贝格(Lebesgue)可测函数，如果积分

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty$$

就说函数$x(t)$ p方L可积函数，记为$x(t)\in L^p[a,b]$，$p=1$时就是L可积函数类用$L[a,b]$表示，$p=2$时叫做平方L可积函数类，记为$L^2[a,b]$。

对于任意$x(t)$，$y(t)\in L^p[a,\ b]$，规定距

$$d(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (h)$$

显然$d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0 \Leftarrow\Rightarrow x=y$；$d(x,y)=d(y,x)$；而三点不等式可由闵可夫斯基积分不等式($f$)直接导出。所以$L^p[a,b]$是一个度量空间。

例3 离散的度量空间。

设X为任一非空集，对于$x,y\in X$，令

$$d(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{当} x\neq y \\ 0 & \text{当} x=y \end{cases}$$

显然$d(x,y)$满足距离条件，因此X按d成为一个度量空间，一个度量空间中，如果任何两个不同点之间的距离始终大于一个正的常数，那末就称这个度量空间是离散的。这也说明任一非空集都可以在其上适当地引进距离，使之成为离散的度量空间。

综上所述，对于度量空间，我们应当注意：

1°对于任何一个非空集，我们总可以定义距离，而且定义距离的方式一般说来不是唯一的，但我们应该根据集的特点适当地引进距离，以期充分反映其特点，例如对$C[a,b]$，我们常用（d）式定义距离，对于$L[a,b]$，我们常用（h）式定义距离，只有这样，在理论上或实践上才有较大的意义：

2°如果一个非空集上定义了两个距离，那么由它们导出的收敛概念可以是一致的也可以是不一致的。

§3·3 度量空间中的点集

为了进一步研究度量空间中的极限、连续等概念，有必要研究度量空间中的点集。我们把R中关于点集的某些概念拓广到度量空间中，大多数定义的叙述和定理的证明，几乎可以逐字逐句地移植过来，而无须作多大的改变。尽管如此，由于度量空间的广泛性，我们仍然要仔细对待这些概念的拓广，有必要时将指出其中的差别。

定义1 设X是一个度量空间，$x\in X,\delta>0$，则称X中的点集$\{y|d(x,y)<\delta, y\in X\}$为以$x$为中心，以$\delta$为半径的开球，称$\{y|d(x,y)\leqslant\delta, y\in X\}$为闭球，分别记为$B(x,\delta)$和$\overline{B}(x,\delta)$，有时也把开球记为$B_\delta(x)$。开球$B_\delta(x)$也称为$x$的一个$\delta$邻域。

定义2 设X是一个度量空间，$G\subset X$，$x\in X$，如果存在x的一个邻域$B_\delta(x)\subset G$，则称x是G的内点，显然G的内点都属于G，如果G中的一切点都是它的内点，则称G为开集。

设G是包含点x的开集，我们也称G为x的一个邻域。由定义立刻知道，X中的任何开集一定是某些开球（可能是

无穷多个）的并，而任何一个开球本身也是开集。

关于度量空间中的开集，我们也有如下的基本性质。

定理1 设X是度量空间，则

(1)空间X与空集ϕ，都是开集；

(2)在X中任意多个开集的并是开集；

(3)在X中有限个开集的交是开集。

由于几乎可以逐字逐句重复§2·2定理1的证明，故本定理证明从略。

定义3 设X为度量空间，$A\subset X$，对于x_0的任何一个邻域$B_\delta(x_0)$中，都含有A中异于x_0的点，即$(B_\delta(x_0)-\{x_0\})\cap A\neq\phi$，则称$x_0$是$A$的聚点（也称极限点）。

A的聚点全体所成之集称为A的导集，记为A'。

定义4 如果集A的聚点全部属于A，即$A'\subset A$称A是闭集；称 $A\cap A'$为A的闭包，记为$\overline{A}=A\cap A'$。

关于度量空间的闭集也有下面的一些重要性质。

定理2 设X为度量空间，$A\subset X$，A为闭集的充要条件是：A中任何一个收敛点列必收敛于A中一点。

定理3 设X为度量空间 $A\supset X$，A为闭集的充要条件是$X-A=CA$为开集。

于是由笛摩根公式及定理1可证明。

定理4 设X为度量空间，则

(1)空间X与空集ϕ都是闭集；

(2)X中任意多个闭集的交是闭集；

(3)X中有限多个闭集的并是闭集。

定理5 设X为度量空间，$A\subset X$，A为闭集的充要条件是$A=\overline{A}$。

证明见§2·4定理2。

由于集合X的任意性(只要非空)以及在X上定义的距离的多样性，在一般的度量空间中的开集闭集等将出现不同于欧几里得空间的新情况。

例如，当X是离散的度量空间时，对任何$x\in X$，以x为中心，以某正数为半径的开球只含x，因此，X中的每一个单元素集都是开集，再由开集的性质以及开集和闭集的关系，可知每个单元素集又都是闭集，于是每个单元素集是既开且闭的集。这种情况在欧几里得空间中不可能出现，对于欧几里得空间来说，其中既开且闭的集只有空间本身和空集。

§3·4　度量空间的极限·稠密集·可分空间

在度量空间中，可以象数学分析一样定义点列的收敛概念。

设$\{x_n\}$是(X,d)中点列，如果存在$x\in X$，使

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

或者说，如果对于任意给定的正数ε，存在着正整数N，使得当$n>N$时，都有

$$d(x_n,x)<\varepsilon$$

成立，则称$\{x_n\}$是收敛点列，x是点列$\{x_n\}$的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x \quad \text{或} x_n\to x$$

类似于R，可以证明度量空间中收敛点列的极限是唯一的。

定义1　设X是度量空间，$A\subset X$(A非空)$x\in X$，称d

$d(x,A)=\inf\limits_{y\in A}d(x,y)$为点$x$到子集$A$的距离。

定义 2 度量空间X的子集A称为有界的是指存在X中的某个闭球$\overline{B}(x_0,\delta)$使$A\subset\overline{B}(x_0,\delta)$。

显然，A有界的充要条件是对任何$x\in X$，可以x为中心，以充分大的δ为半径作开球$B_\delta(x)$，使$A\subset B_\delta(x)$。

定义3 设$A\subset X$，A非空，称$\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A}d(x,y)$为$A$的直径。

显然，A有界的充要条件是$\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A}d(x,y)$有限。

下面讨论某些具体空间中点列收敛的具体意义。

例1 R^n为n维欧氏空间

$x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots,\xi_n^{(m)})$ $m=1,2,\cdots$为R^n中的点列，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$，不难证明$\{x_m\}$按距离

$$d(x_m,x)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i^{(m)}-\xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

收敛于x的充要条件为对于每一个$1\leqslant i\leqslant n$，有$\xi_i^{(m)}\to\xi_i$ $(m\to\infty)$。

例2 $C[a,b]$空间

设$\{x_n\}$及x分别为$C[a,b]$中点列及点，则

$d(x_n,x)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|$收敛于0的充分必要条件为函数列$\{x_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于$x(t)$。

〔证明〕 设$\{x_n(t)\}$按照距离$d(x_n,x)$收敛于$x(t)$即

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$$

也就是当$n\to\infty$时，

$$\max|x_n(t)-x(t)|\to 0$$

这意味着对任意给的$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时

$$\max_{a\leq t\leq b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

因此，对所有的$t\in[a,b]$，只要$n>N$（N与t无关 而仅与ε有关）就有

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

即$\{x_n(t)\}$一致收敛于$x(t)$。

反之，设$\{x_n(t)\}$作为函数列一致收敛于$x(t)$，则对任给$\varepsilon>0$，存在N(N与t无关仅与ε有无)使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

对于所有的$t\in[a,b]$一致地成立。于是

$$\max_{a\leq t\leq b}|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon$$

即$d(x_n,x)\leqslant\varepsilon$，因此，$d(x_n,x)\to 0$,这表明$\{x_n(t)\}$作为空间$C[a,d]$中的点列收敛于$x(\mathrm{t})$。

例3 序列空间S

设 $x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots,\xi_n^{(m)},\cdots),m=1,2,\cdots$ 及 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$ 分别为S中点列及点，下面证明点列$\{x_m\}$收敛于x的充分必要条件为x_m依座标收敛于x，即对每个自然数i，成立$\xi_i^{(m)}\to\xi_i$。

事实上，如果$x_m\to x$，即

$$d(x_m,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}\to 0\quad(m\to\infty)$$

所以对任何自然数i，因为

$$\frac{|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}\leqslant 2^i d(x_m,x)$$

所以
$$\frac{|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}$$

当$m\to\infty$时收敛于0，因此，对任意给定的正数ε，存在自然数N，使得当$m>N$时，成立

$$\frac{|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

由此可得$|\xi_i^{(m)}-\xi_i|<\varepsilon$，这说明对每个$i=1,2,\cdots$当$m\to\infty$ $\xi_i^{(m)}\to\xi_i$，反之，若对每个$i=1,2,\cdots$，成立着$\xi_i^{(m)}\to\xi_i$ $(m\to\infty)$，对任何给定的正数ε，因为级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$收敛，所以存在自然数$m$，使

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$$

又对每个$i=1,2,\cdots,m-1$，存在N_i，使当$n>N_i$时

$$|\xi_i^{(m)}-\xi_i|<\frac{\varepsilon}{2}$$

令$N=\max\{N_1, N_2, \cdots N_{m-1}\}$，那么当$n>N$时，

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(\ )}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(\ )}-\xi_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

所以，当$n>N$时，有

$$d(x_n,x)=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}$$

$$+\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}<\varepsilon$$

即$x_n\to x$。 〔证毕〕

由上面一系列例子可以看到，尽管在每个具体空间中各种极限概念不完全一致（依坐标收敛，一致收敛等），但当我们引入适当的距离以后，都可统一在度量空间的极限概念之中，这就为统一处理提供了方便。

下面我们引入度量空间中稠密性和可分空间的概念。

第二章里我们已经讨论过欧几里得空间中点集的稠密性概念，不难把它拓广到一般度量空间的点集上。

定义4 设X是度量空间，A及B是X中的点集。如果B中任何一点x的任何领域中都含有集A中的点，就称A在B中稠密。当$B=X$时，称A为X的稠密子集。

同样我们也有下面的定理。

定理1 (1)A在B中稠密的充要条件是$\overline{A}\supset B$。

(2) A在B中稠密的充要条件是对任一$x\in B$，有A中的点列$\{x_n\}$，$x_n\to x$（$n\to\infty$）

定义5 设X是度量空间。如果对于X中的点集B存在有限集或可列集$\{x_n\}\subset X$在B中稠密，就称B是可分点集。

这时必有B中的有限个或可列个点在B中稠密。事实上，由定义$\{x_n\}$在B中稠密，$B\cap B(x_n,\frac{1}{n})$不空，任取其中的点x_{n_k}，B中的这些点的全体$\{x_{n_k}\}$就在B中稠密。

当空间X本身是可分时，称X是可分空间。

例1　n维欧氏空间R^n是可分空间。事实上坐标为有理数的全体是R^n的可列稠密子集。

例2　离散度量空间X可分的充要条件为X是可列集。

事实上在X中没有稠密真子集，所以X中唯一的稠密子集只有X本身，因此，X可分的充要条件为X是可列集。

例3　空间l^p（$1\leqslant p<\infty$）是可分的。

因为形如$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m,0,\cdots)$，而$y_1 y_2,\cdots,y_m$是有理数的点的全体$A$是可列集，它在$l^p$中稠密。事实上，任取$x=\{x_i\}$，设$x\in l^p$，今证$x\in \bar{A}$。由于$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$，对任意正数$\varepsilon$，必有$m$使得

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}|x_i|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

再取有理数$y_1,y_2,\cdots,y_m$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

因此，A中的点$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m,0,\cdots)$与$x$的距离$|y-x|_p=d(x,y)<\varepsilon$，即$x\in B(x,\varepsilon)\cap A$，所以$x\in\overline{A}$。

下面举一个不可分度量空间的例子，令l^∞表示有界实数（或复）数列全体，对l^∞中任意两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$。

定义

$$d(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|$$

易证l^∞按距离$d(x,y)$成为度量空间。

例4 l^∞是不可分空间

〔证明〕 令A表示l^∞中坐标ξ_i取值0或1的点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$全体，则$A$与二进位小数一一对应，所以$A$有连续统的基数，对$A$中任意两个不同的点$x,y$有$d(x,y)=1$，如果$l^\infty$可分，则$l^\infty$中存在可列稠密子集，设为$\{y_k\}$，对$A$中每一点作开球$B(x,\frac{1}{3},)$则

$$\{B(x,\frac{1}{3})\,|x\in A\}$$

是一族两两不相交的球，总数有不可列个，但由于$\{y_k\}$在l^∞中稠密，所以，每个$B(x,\frac{1}{3})$中至少含有$\{y_k\}$中一点，这与$\{y_k\}$是可列集矛盾。

§3·5 连续映射

§3·3、§3·4研究了度量空间中点集的性质，但我们常常还要研究两个度量空间之间的关系，这种关系需要用到映射以及映射的连续性等概念。

仿照直线上函数连续性的定义，我们引入度量空间中映射连续性的概念。

定义1 设$X=(X,d)$，$Y=(Y,d)$是两个度量空间，T是X到Y中的一个映射，$x_0\in X$，如果对于任意给定的正数ε存在正数δ，使对X中一切满足$d(x,x_0)<\delta$的x，成立

$$d(Tx,Tx_0)<\varepsilon$$

则称T在x_0连续。

如果用邻域来描述，那末T在x_0连续的定义可以改述为：对于Tx_0的每个ε—邻域$B(Tx_0, \varepsilon)$，必有x_0的某个δ—邻域$B(x_0,\delta)$使得

$$TB(x_0,\delta)\subset B(Tx_0,\varepsilon)$$

其中$TB(x_0,\delta)$表示$B(x_0,\delta)$在映射作用下的象。

R中函数连续性各种形式的定义都可以推广到度量空间的连续性上来，因此，我们可以根据需要灵活地使用任一形式的连续性定义。

例1 $y=\sin x$是R到R中的一个连续映射。

例2 设X是以d为距离的度量空间，$x_0\in X$是个定点，则$f(x)=d(x,x_0)$是X到R中的一个连续映射。

其实，对于给定的x，$y\in X$，由距离的三点不等式，有

$$|f(y)-f(x)|=|d(y, x_0)-d(x, x_0)|\leqslant d(y,x)$$

对于任意给定的正数ε，取$\delta=\varepsilon$，当$d(y, x)<\delta$时，就有

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon$$

故映射f在X中的任一点都连续，即f是X到R中的连续映射，我们常称$f(x)=d(x, x_0)$为距离函数。

下面我们给出连续性的几个等价的概念。

定理1 设T是度量空间(X,d)到度量空间(Y, d)中的映射，那末在$x_0\in X$连续的充要条件为当X中的点列$x_n\to x_0$时，必有

$$Tx_n\to Tx_0$$

〔证明〕 必要性。如果T在$x_0\in X$连续，那么对任意给的正数ε，存在正数δ，使当$d(x,x_0)<\delta$时，有$d(Tx, Tx_0)<\varepsilon$，因为$x_n\to x$，所以有自然数N，当$n>N$时，有$d(x_n,$

$x_0)<\delta$，因此

$$d(Tx_n, Tx_0)<\varepsilon$$

这就证明了$Tx_n \to Tx_0$。

充分性。用反证法，如果T在x_0不连续，那么存在正数ε_0，使对任何正数δ，总有$x \neq x_0$，满足$d(x,x_0)<\delta$，但$d(Tx,Tx_0) \geqslant \varepsilon_0$，特取$\delta = \frac{1}{n}$则有$x_n$，使$d(x_n, x)<\frac{1}{n}$，但$d(Tx_n,Tx_0) \geqslant \varepsilon_0$，这就是说，$x_n \to x_0$，但$Tx_n$不收敛于$Tx_0$，这与假设矛盾。〔证毕〕

如果映射T在X的每一点都连续，则称T是X上的连续映射，为此，称集合

$$\{X \mid x \in X,\ Tx \in M\} \quad M \subset Y$$

为集合M在映射T下的原象，应记为$T^{-}M$。

定理2 度量空间X到Y中的映射T是X上连续映射的充要条件为Y中任意开集M的原象$T^{-1}M$是X中的开集。

〔证明〕 必要性。设T是连续映射，$M \subset Y$是Y中开集，如果$T^{-1}M=\phi$，那末$T^{-1}M$是X中开集。如果$T^{-1}M \neq \phi$，则对任意$x_0 \in T^{-1}M$，令$y_0 = Tx_0$，则$y_0 \in M$。由于M是开集，所以存在y_0的ε邻域$B_\varepsilon(y_0)$，$B_\varepsilon(y_0) \subset M$，由于T的连续性，存在$x_0$的$\delta$邻域$B_\delta(x_0)$，使$TB_\delta(x_0) \subset B_\varepsilon(y_0)$，这就是说

$$B_\delta(x_0) \subset T^{-1}B_\varepsilon(y_0) \subset T^{-1}M$$

所以x_0是$T^{-}{}_0M$的内点，由x_0的任意性知$T^{-1}M$是X中开集。

充分性：如果Y中每个开集的原象是开集，对任意$x_0 \in X$及Tx_0的ε邻域$B_\varepsilon(Tx_0)$，那么$T^{-1}B_\varepsilon(Tx_0)$是$X$中开

集，又$x_0\in T^{-1}B_\varepsilon(Tx_0)$，所以$x_0$是$T^{-1}B_\varepsilon(Tx_0)$的内点，因而存在$x_0$的某个$\delta$邻域$B_\delta(x_0)$，使$B_\delta(x_0)\subset T^{-1}B_\varepsilon(Tx_0)$，于是$TB_\delta(x_0)\subset B_\varepsilon(Tx_0)$，这说明T在$x_0$连续，由$x_0$的任意性可知T是$X$上的连续映射。〔证毕〕

利用关系$T^{-1}(CM)=C(T^{-1}M)$，不难证明在上面定理中的开集改为闭集后定理仍成立。

仿照函数的一致连续性，我们给出映射一致连续性的概念。

定义2 设T是X到Y中的映射，如果对于任意正数ε，存在只依赖于ε的$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对$X$中一切满足$d(x_1,x_2)<\delta$的$x_1,x_2$，都有

$$d(Tx_1,\ Tx_2)<\varepsilon$$

则称T在X上是一致连续的。

特别，如果有常数$C>0$，使对任何$x_1,x_2\in X$，都有

$$d(Tx_1,Tx_2)\leqslant Cd(x_1,x_2)$$

则称映射T是李普希兹(Lipschitz)连续的，C叫做李普希兹常数。

很明显，映射T是李普希兹连续的，它必是一致连续的，而当T是一致连续时，它也必是连续映射，但是，它们的逆却是未必成立的。

例3 设$Tf(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，易知T：$L^2[a,b]\to L^2[a,b]$，并且T是连续映射。

事实上，当$f,g\in L^2[a,b]$时总有

$$d(Tf,\ Tg)=\left(\int_a^b|Tf(x)-Tg(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

而因 $|Tf(x)-Tg(x)|=|\int_a^x f(t)dt-\int_a^x g(t)dt|$

$$\leqslant\int_a^x |f(t)-g(t)|dt$$

利用许瓦兹(Schwarz)积分不等式

$$\int_a^b f_1(t)f_2(t)dt\leqslant\left(\int_a^b f_1^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_a^b f_2^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

（这就是荷尔德积分不等式在$p=q=2$的情形）在这里令 $f_1(t)=1$，$f_2(t)=f(t)-g(t)$，并注意到对$a>0$有

$$\int_a^x a\,dt\leqslant\int_a^x a\,dt$$

我们有

$$|Tf(x)-Tg(x)|\leqslant(b-a)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(b-a)^{\frac{1}{2}}d(f,g)$$

所以

$$\left(\int_a^b |Tf(x)-Tg(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant(b-a)\,d(f,g)$$

令 $b-a=c$，则得

$$d(Tf,Tg)\leqslant cd(f,g)$$

故映射T在$L^2[a,b]$上连续。

例4 设R^n，R^m分别具有距离

$$d_1(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(u,v)=\left(\sum_{i=1}^{m}|u_i-v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中： $x=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,\ y_2,\cdots,y_n)\in R^n$

$u=(u_1,u_2,u\cdots u_m),\ v=(v_1,v_2,\cdots,v_m)\in R^m$

令映射F： $R^n\to R^m,F(x)=v$， 定义为

$$F(x)=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots F_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{m1} & F_{m2} & \cdots F_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

其中F_{ij}为定数，则不难证明F在R的任意一点x处是连续，事实上容易证明F是李普希兹连续

$$v_i=\sum_{j=1}^{n}F_{ij}x_j \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

设x^0是R^n中一给定点， $v^0=F(x^0)$， 则

$$(d_2(v,v^0))^2=\sum_{i=1}^{m}|v_i-v^0{}_i|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}|\sum_{j=1}^{n}F_{ij}x_j-\sum_{l=1}^{n}F_{ij}x^0{}_j|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}|\sum_{j=1}^{n}F_{ij}(x_j-x^0{}_j)|^2$$

$$|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|F_{ij}|^2)\sum_{j=1}^{n}|x_j-x^0{}_j|^2$$

上面最后一步应用了哥西不等式。

令 $C^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|F_{ij}|^2$

可得 $d_2(v,v^0))^2\leqslant C^2\sum_{j=1}^{n}|xj-x_j{}^0|^2$

即 $d_2(v,v^0)\leqslant Cd_1(x,x^0)$ 〔证毕〕

例5 把上面的例子推广到$m=n=\infty$的情形，即l^2空间，其距离规定为

$$d(x,y)=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

其中：$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots y_n,\ \cdots)\in l^2$
映射F：$l^2\to l^2$的具体形式为

$$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}F_{ij}x_j\quad(i=1,2,\cdots)$$

利用例4的方法可推出：若存在常数$C>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|F_{ij}|^2<C$$

则映射F是连续的。

§3·6 哥西点列和完备度量空间

我们知道实数集有一个重要特性，即任何一个哥西点列，必有极限。这就是通常所说的实数集的完备性，这个性质在数学分析中起着重要作用，现在我们在度量中引进相应的概念。

首先回忆一下R中哥西点列的定义，设$\{x_n\}$是R中的点列，如果对任意给定的正数ε，存在自然数$N=N(\varepsilon)$，当$n>N$时有

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon$$

则称 $\{x_n\}$ 是R中的哥西点列，类似地可以定义度量空间中的哥西点列。

定义1 设$X=(X,d)$是度量空间，$\{x_n\}$是X中点列，如果对任意给定的正数ε，存在自然数$N=N(\varepsilon)$，使当n．$m>N$时，必有

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

则称$\{x_n\}$是X中的哥西点列或称基本点列。如果度量空间(X,d)中每个哥西点列都收敛，那末称(X,d)是完备的度量空间。

由完备度量空间的定义，立即可知有理数全体按绝对值距离构成的空间不完备，但n维欧氏空间R^n则是完备的度量空间。在一般度量空间中，哥西点列不一定收敛，但是度量空间中的每一个收敛点列都是哥西点列。

实际上，如果$x_n \to x$，那末对任何正数ε，存在$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$时，有

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此，当n，$m>N$时，由三点不等式，得到

$$d(x_n,x_m) \leqslant d(x_n,x)+d(x_m,x) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即$\{x_n\}$是哥西点列。

例1 $l^p(1\leqslant P<\infty)$是完备度量空间

设$\{x_n\}$是l^p中的哥西点列，$x_m=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$，于是对任给$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，当$n,m>N$时，有

$$d(x_m,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \qquad (a)$$

因此，对每个固定的i，当$n,m>N$时，都有

$$|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|<\varepsilon \qquad (b)$$

这就是说数列$\xi_i^{(k)}$，$k=1,2,\cdots$是哥西数列，因此存在着数ξ_i使得

$$\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$$

令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_i,\cdots)$，那末由不等式（$a$）可知

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|^p<\varepsilon^p$$

令 $n\to\infty$，当$m>N$时，得

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(m)}-\xi_i|^p<\varepsilon^p$$

再令$k\to\infty$，当$m>N$时，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(m)}-\xi_i|^p<\varepsilon^p$$

因此，当$m>N$时，有

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(m)}-\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \qquad (c)$$

由（c）得

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\xi_i^{(m)}|^p\right)$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

故知 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\ \cdots)\in l^p$，并由（$c$）知$d(x_m,x)<\varepsilon$，也即

$$x_n \to x\ (n\to\infty)$$

这就证明了l^p是完备的度量空间。

例 2 l^∞是完备度量空间（读者自证）。

例3 $C[a,b]$是完备的度量空间

设$x_m, m=1,2,\cdots$是$C[a,b]$中的哥西点列，于是对任给正数$\varepsilon>0$，存在着自然数N，使得当$n,m>N$时，有

$$\max_{a\leq t\leq b}|x_m(t)-x_n(t)|=d(x_m,x_n)<\varepsilon \qquad (d)$$

这说明当t固定时，$x_n(t), n=1,2,\cdots$，是哥西点列。所以存在$x(t)$，使$x_m(t)\to x(t)$，下面证明$x(t)$是$[a,b]$上连续函数，且$x_n\to x$。事实上，在(d)中令$n\to\infty$，即可得到当$m>N$时，有

$$\max_{a\leq t\leq b}|x_m(t)-x(t)|\leq\varepsilon \qquad (e)$$

这说明$x_m(t)$在$[a,b]$上一致收敛于$x(t)$，所以$x(t)$是$[a,b]$上连续函数，因此，$x\in C[a,b]$，且由(e)知，当$m>N$时，

$$d(x_m,x)=\max_{a\leq t\leq b}|x_m(t)-x(t)|\leq\varepsilon$$

即 $x_m\to x$，这就说明了$C[a,b]$是完备度量空间。

下面举几个不完备空间的例子。

例4 令$P[a,b]$表示闭区间$[a,b]$上实数多项式全体，那末$P[a,b]$作为$C[a,b]$的子空间是不完备的度量空间，事实上存在多项式列P_k，$k=1,2,\cdots$。在$[a,b]$上一致地收敛于某个非多项式的连续函数，也就是说$P[a,b]$不是完备度量空间。

设X是闭区间$[-2,2]$上连续函数空间，对于任何$x,y\in X$，令

$$d(x,y)=\int_{-2}^{2}|x(t)-y(t)|\,dt$$

那末$(X,\ d)$成为一度量空间，事实上，容易验证$d(x,y)$满足距离条件

例5 上面定义的度量空间$(X,\ d)$不完备

〔证明〕 令（如图3-2）

$$x_m(t)=\begin{cases}0 & -2\leqslant t<1-\dfrac{1}{m}\\ mt+1-m & 1-\dfrac{1}{m}\leqslant t\leqslant 1\\ 1 & 1<t\leqslant 2\end{cases}$$

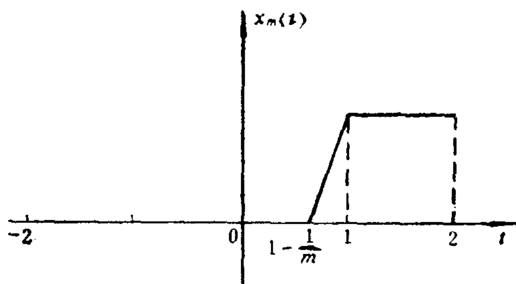


图3-2

我们来验证$\{x_m(t)\}$是(X,d)中的哥西点列．事实上，对任何正数$\varepsilon>0$，当$n>m>\dfrac{1}{\varepsilon}$时，

$$d(x_n, x_m) = \int_{-2}^{2} |x_n(t) - x_m(t)|\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$$

所以$\{x_m(t)\}$是哥西点列，但是$\{x_m(t)\}$在(X,d)中并不收敛，假定 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$，即

$$d(x_n, x_0) = \int_{-2}^{1} |x_n(t) - x_0(t)|\,dt \to 0$$

由于
$$d(x_n, x_0) = \int_{-2}^{1-\frac{1}{n}} |x_0(t)|\,dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} |x_n(t) - x_0(t)|\,dt$$

$$+ \int_{1}^{2} |1 - x_0(t)|\,dt \to 0$$

必有
$$\int_{-2}^{1-\frac{1}{n}} |x_0(t)|\,dt = 0, \qquad \int_{1}^{2} |1 - x_0(t)|\,dt = 0$$

即

$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & -2 \leqslant t < 1 \\ 1 & 1 \leqslant t < 2 \end{cases}$$

显然$x_0(t)$不是$[-2,1]$上的连续函数，这说明哥西点列的极限不在$C[-2,2]$中，因此，(X,d)不完备。

例6　在$X=C[0,1]$中考虑点列

$$x_m(t)=\begin{cases}1-mt & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{m}\\ 0 & \frac{1}{m}<t\leqslant 1\end{cases}$$

如果在X中引进距离

$$d(x,y)=\left(\int_0^1|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

则$\{x_m(t)\}$在这个距离$d(x,y)$之下是哥西点列，其极限是0，故(X,d)是完备的。然而如果用

$$d_\infty(x,y)=\sup_{t\in(0,1)}|x(t)-y(t)|$$

来定义距离，则对每个m，$d_\infty(0,x_m(t))=1$，故$x(t)=0$不是$\{x_m(t)\}$在距离$d_\infty(x,y)$下的极限，按$d_\infty(x_m,x)$收敛即蕴含着逐点收敛，因此，这个点列的极限应为

$$x(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & 0<t\leqslant 1\end{cases}$$

而$x(t)$显然不连续，故$\{x_m(t)\}$在距离d_∞之下不收敛于$X=C[0,1]$中的点列，故(X,d_∞)不完备。

从例3、5、6，告诉我们同一个集$C[a,b]$，确实可以用不同的方法定义度量，适当定义度量，它就成为完备的空间，不适当地定义度量，它也可为不完备的。所以，我们对具体的空间应定义适当的度量，这是问题的一个方面。但同一个集，例如$C[a,b]$，度量的选择还应考虑到实际问题的要求，例如选择了度量：

$$d(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t$$

那末(X,d)就是不完备的。现在的问题，是否也能通过“添加”些点后使之成为完备空间呢？这就是度量空间完备化的问题。回答是肯的，在叙述完备化定理之前，先给出关于子空间完备的一个定理。

定理1 完备度量空间X的子空间M，是完备空间的充要条件为M是X中的闭子空间。

〔证明〕 设M是完备子空间，对每个$x\in \overline{M}$，存在M中点列$\{x_n\}$，使$x_n\to x$，由前述，$\{x_n\}$是M中哥西点列，所以在M中收敛，由极限的唯一性可知$x\in M$，即$\overline{M}\subset M$，所以$\overline{M}=M$，即M是闭子空间

反之，如果$\{x_n\}$是M中哥西点列，因X是完备度量空间，所以存在$x\in X$，使$x_n\to x$，由于M是X中闭子空间，所以$x\in M$，即$\{x_n\}$在M中收敛，这就证明了M是完备度量空间。 〔证毕〕

例7 C表示所有收敛的复数列全体，对C中任意两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，令

$$d(x,y)=\sup_j|\xi_j-\eta_j|$$

则C是完备的度量空间。

〔证明〕 由定理1，只要证C是l^∞中的闭子空间即可。对任何$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in\overline{C}$存在$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)\in C$，$n=1,2,\cdots$，$x_n\to x$，因此对任何正数$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，当$n\geqslant N$时，对所有自然数$j$，成立

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|\leqslant d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

特别取$n=N$，那么对所有j，有

$$|\xi_j^{(N)}-\xi_j|<\frac{\varepsilon}{3}$$

但因$x_N\in C$，即$\xi_j^{(N)}$当$j\to\infty$时收敛，因而存在N_1，使得j，$k\geqslant N_1$时，有

$$|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|<\frac{\varepsilon}{\varepsilon}$$

于是当j，$k\geqslant N_1$时，成立

$$|\xi_j-\xi_k|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(N)}|+|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|+|\xi_k^{(N)}-\xi_k|<\varepsilon$$

这说明ξ_j，$j=1,2,\cdots$是哥西数列，因而收敛，即$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in C$，所以$C$是$l^\infty$的闭子空间。

§3·7 度量空间的完备化

我们曾指出直线上有理数全体Q作为R的子空间不是完备的度量空间。但是我们可以将Q“扩大”成完备的度量空间R，即在Q中加入“无理数”，使之成为新的度量空间R，并且Q在R中稠密。下面我们要说明每一个不完备的度量空间都可以“扩大”，即成为某个完备度量空间的稠密子空间，为此，先介绍等距和等距映射的概念。

定义1 设(X,d)。(X_1,d_1)是两个度量空间，如果存在一个由X到X_1上的映射T，使得对一切$x,y\in X$有

$$d_1(T_x,T_y)=d(x,y)$$

则称(X,d)和(X_1,d_1)等距同构或称(X,d)和(X_1,d_1)等距，此时称T为X到X_1上等距(同构)映射。

在泛函分析中，往往把两个等距同构的度量空间不加区

别而视为同一的。

定理 （度量空间完备化定理） 设$X=(X,d)$是度量空间，一定存在一个完备度量空间$X_1=(X_1,d_1)$使X与X_1的某个稠密子空间W等距，并且X_1在等距意义下是唯一的。

这个定理的证明本质上类似于康脱（Cantor）引进实数的过程，由于证明复杂，我们在此略去。

如果我们把两个等距同构的度量空间不加区别，视为同一，那末定理1可以改述如下：

设$X=(X,d)$是度量空间，那么存在唯一的完备度量空间$X_1=(X_1,d_1)$，使X为X_1的稠密子空间。

例1 设$P[a,b]$是定义在闭区间$[a,b]$上的多项式全体所成的空间，引进距距

$$d(P,Q)=\max_{a\leq t\leq b}|P(t)-Q(t)|$$

空间$P[a,b]$是不完备的（§3.6 例4），但$P[a,b]$在完备度量空间$C[a,b]$中处处稠密，所以$P[a,b]$的完备化空间为$C[a,b]$。具体的说，一致收敛的多项式序列的极限不一定是多项式，但这个极限必为连续函数，我们把这种“极限点”添加到$P[a,b]$中去，就得到了完备的$C[a,b]$空间。

例2 设$R^p[a,b]$为RP方可积函数空间，我们引进距离

$$d(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

对于每个$x(t)\in P^p[a,b]$，要求

$$\int_a^b|x(t)|^p dt<\infty$$

记$X=R^p[a,b]$，则空间(X,d)不是完备的，因为R可积函数列，它的极限不一定是R可积的，而是L可积的，如果我们把这个“极限点”添加到$R^p[a,b]$中去，就得到了空间$L^p[a,d]$，可以证明它是完备的度量空间。

§3·8 压缩映射原理及其应用

在微分方程、积分方程以及其它各类方程的理论中，解的存在性，唯一性以及近似解的收敛性等都是很重要的问题。为了证明一个微分方程、积分方程或其它类型的方程存在解。我们可以将它变成求某一映射的不动点。现在以大家熟悉的一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3·1}$$

为例来说明这一观点。求微分方程(3·1)满足初始条件$y|_{x_0}=y_0$的解与求解积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(t))\,dt \tag{3·2}$$

等价。为了求解积分方程(3.2)，我们可以根据$f(x,y)$所满足解析条件适当地取一个距离空间，并在这个距离空间中作映射

$$(T\varphi)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt$$

于是方程(3.2)的解就转化为求出φ使它满足$\varphi=T\varphi$，也就是求这样的φ，它经映射T作用后仍变为φ，这种φ称为映射T的不动点。因此，求解方程(3.1)就变成求映射T的不

动点。这种将求解方程变成求映射的不动点的作法在数学中是常用的。

在介绍不动点原理——压缩映射原理之前，我们先给出压缩映射的定义。

定义 1 设X是度量空间，T是X到X中的映射，如果存在一个数α，$0<\alpha<1$，使得对所有的x，$y\in X$，成立

$$d(Tx,Tx)\leqslant \alpha d(x,y) \tag{3.3}$$

则称T是压缩映射。

压缩映射在几何上的意义是说：点x和y经T映射后，它们的象的距离缩短了，不超过$d(x,y)$的α倍($\alpha<1$)。

现在我们介绍不动点定理中最基本的一个，

定理（巴拿赫压缩映射原理）设X是完备的度量空间，T是X上的压缩映射，则T有且只有一个不动点。换句话说，就是方程$Tx=x$，有且只有一个解。

〔证明〕 设x_0是X中任意一点，令$x_1=Tx_0$，$x_2=Tx_1=T^2x_0$，…，$x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0$，…我们证明点列$\{x_n\}$是X中哥西点列。

事实上，

$$\begin{aligned} d(x_{m+1},x_m) &= d(Tx_m,\ Tx_{m-1}) \\ &\leqslant \alpha d(x_m,x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1},\ Tx_{m-2})\leqslant \alpha^2 d(x_{m-1},\ x_{m-2}) \\ &\leqslant\cdots\leqslant \alpha^m d(x_1,\ x_0) \end{aligned} \tag{3.4}$$

由三点不等式，当$n\geqslant m$时

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leqslant d(x_m,x_{m+1})+d(x_{m+1},x_{m+2}) \\ &\quad +\cdots+d(x_{n-1},x_n) \\ &\leqslant (\alpha^m+\alpha^{m+1}+\cdots+\alpha^{n-1})d(x_0,x_1) \\ &= \alpha^m\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

因$0<\alpha<1$，所以$1-\alpha^{n-m}<1$，于是得到

$$d(x_m,x_n)\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x_0,x_1) \tag{3.5}$$

所以当$m\to\infty$，$n\to\infty$时，$d(x_m,x_n)\to 0$，即$\{x_n\}$是X中哥西点列，由X的完备性，存在$x\in X$，使$x_m\to x$，又由三点不等式和条件（3.3），我们有

$$\begin{aligned} d(x,\ Tx) &\leqslant d(x,x_m)+d(x_m,Tx) \\ &\leqslant d(x,\ x_m)+\alpha d(x_{m-1},x) \end{aligned}$$

上面不等式右端当$m\to\infty$时趋于0，所以$d(x,\ Tx)=0$，即$x=Tx$。

下面证明唯一性。如果又有$\tilde{x}\in X$，使得$T\tilde{x}=\tilde{x}$，则由条件（3.3）

$$d(x,\tilde{x})=d(Tx,T\tilde{x})\leqslant\alpha d(x,\tilde{x})$$

因$\alpha<1$，所以必须$d(\tilde{x},x)=0$，即$x=\tilde{x}$。〔证毕〕

压缩映射原理不仅证明了方程$Tx=x$解的存在性和唯一性，而且也提供了求解的方法——逐次逼近法。即只要任取$x_0\in X$，令$x_n=T^n x_0$，则解$x=\lim x_n$。如果在（3.5）中，令$n\to\infty$，则有

$$d(x_m,x)\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x_0,x_1) \tag{3.6}$$

（3.6）式给出了用$\{x_n\}$逼近解x的误差估计式。

下面应用举例

例1 设F：$[a,b]\to[a,b]$，是可导函数，且$|F'(x)|\leqslant k<1$则方程$x=F(x)$在$[a,b]$上有唯一的解。

事实上，$[a,b]$作为完备空间R的闭子空间是完备的，设

x，$y \in [a,b]$，由中值定理知

$$d(F(x),F(y)) = |F(x)-F(y)| = |F'(\xi)(x-y)|$$
$$\leqslant k\mathrm{d}(x,y)$$

所以F是压缩映射，由压缩映射原理知 $x=F(x)$有唯一的解。

例2 弗雷德霍蒙（Fredholm积分方程）设线性积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}t \qquad (a)$$

其中$f(t)$在$[a,b]$上的已知函数，$k(t,s)$为$[a,b]\times[a,b]$上连续函数，且有常数M使得

$$|k(t,s)| \leqslant M < +\infty$$

那么当 $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$时，$(a)$必有唯一的连续解

$\tilde{x}(t) \in [a,b]$

〔证明〕 在空间$C[a,b]$上定义映射

$$\mathrm{T}x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

显然T：$C[a,b]\to C[a,b]$，由于$C[a,b]$完备，只要证明 T 是压缩映射就行了。

记$\alpha = M(b-a)|\lambda|$，则$\alpha<1$，对于任何$x(t),y(t)\in C[a,b]$

$$d(\mathrm{T}x,\mathrm{T}y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\mathrm{T}x(t)-y\mathrm{T}(t)|$$

$$=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\lambda|\int_a^b h(t,s)(x(t)-y(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\lambda| \int_a^b |h(t,s)||x(s)-y(s)|ds$$

$$\leqslant |\lambda| M(b-a) \max_{a\leqslant s\leqslant b} |x(s)-y(s)|$$

$$=\alpha d(x,y)$$

因此，T是一$C[a,b]$到自身的压缩映射，根据压缩原理，积分方程（a）有唯一的连续解$\widetilde{x}(t)$。 〔证毕〕

例3 微分方程解的存在性和唯一性

考察微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases} \qquad (b)$$

其中$f(x,y)$在整个平面内连续，此外还设$f(x,y)$关于y满足（李普希兹）条件：

$$|f(x,y)-f(x,y')|\leqslant K|y-y'|$$

则通过点（x_0,y_0）微分方程（b）有一条且只有一条积分曲线。

〔证明〕 问题（b）等价于求解下面的积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

我们取$\delta>0$，使$k\delta<1$，用$C[x_0-\delta,x_0+\delta]$表示在区间$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上的连续函数组成的空间，在$C[x_0-\delta,x_0+\delta]$中定义映射T ..

$$Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

则
$$d(Ty_1,Ty_2)=\max_{|x-x_0|<\delta}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))]dt\right|$$
$$\leq \max_{|x-x_0|<\delta}\left|\int_{x_0}^{x}k|y_1(t)-y_2(t)|dt\right|$$
$$\leq k\delta\max_{|x-x_0|<\delta}|y_1(t)-y_2(t)|$$
$$=k\delta d(y_1,y_2)$$

因$k\delta<1$，由压缩映射原理，存在唯一的连续函数$y(x)$，使

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt$$

由此式可以看出，$y(t)$还是连续可微的，于是$y=y(x)$便是微分方程（b）通过(x_0,y_0)的积分曲线，但只定义在$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上，重复利用压缩映射原理，可以将它延拓到整个数轴上。

§3·9 度量空间中的紧性

在实数集R（甚至在R^n）中，波尔察诺－维尔斯德拉斯(Bolzano-Weierstrass)定理告诉我们：任一有界无限集，都存在聚点以及任一有界数列都有收敛子列；海涅－鲍莱尔定理给出了R中的紧集就是有界闭集。这些结果在数学分析理论中起着重要作用。那么在一般度量空间中是否也有类似结果呢？本节就来讨论这个问题。我们将会看到在一般度量空间中紧集并不等价于有界闭集，有界点列也未必有收敛子

列。

为了讨论度量空间中的紧性，我们须引进比有界集更强的全有界集的概念。为此，须从有限ε网与全有界讲起。

定义1 设A，B是度量空间X中的点集，$\varepsilon>0$为给定的正数，如果对于A中的任一点x，必存在B中的一点x'，使

$$d(x,x')<\varepsilon$$

则称B是A的一个ε网。

根据以上定义，所谓B是A的ε网，实际上就是指A中任一点x必含在B中的某一点的邻域$B(x',\varepsilon)$中，也即
$\bigcup_{x'\in B} B(x',\varepsilon)\supset A$。

如果B是有限集，则称B是A的有限ε网。

例如平面上坐标为整数的一切点组成的集就是平面的一个$\frac{3}{4}$网。又如距离空间X中的一个稠密子集也定是X的ε网，这里ε是任一正数。

定义2 设A是度量空间X中点集，如果对于任给的$\varepsilon>0$，A总存在有限ε网，则称A是全有界的。

全有界集具有下列性质。

定理1 任何全有界集必有界

〔证明〕 设X是度量空间，$A\subset X$为全有界集，而$\{x_1, x_2,\cdots,x_n\}$是A的一个$\varepsilon=1$网，则对任一$x\in A$，有x_k $(1\leqslant k\leqslant n)$，使得

$$d(x,x_k)<1$$

因此，对一切$x\in A$，有

$$d(x,x_n)\leqslant d(x,x_k)+d(x_k,x_n)$$
$$<1+\max_{1\leqslant k<n} d(x_k,x_n)=1+k$$

其中$k=\max\limits_{1\leq k\leq n} d(x_k,x_n)$是有限数，故$A$有界。

定理2 设A为全有界集，则对任给正数ε，可以取A的一个有限子集作为A的ε网。

〔证明〕 因$A\subset X$全有界，故对任给的正数ε，A有有限的$\frac{\varepsilon}{2}$网$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$均为X中的点。

任取$\tilde{x}_k\in A\cap B(x_k,\frac{\varepsilon}{2})$ $(k=1,2,\cdots,n)$，其中$B(x_k,\frac{\varepsilon}{2})$为以$x_k$为中心，以$\frac{\varepsilon}{2}$为半径的开球，则$\{\tilde{x}_1,\tilde{x}\cdots\tilde{x}_n\}$显然含于$A$中且为$A$的有限$\varepsilon$网。

定理3 任何全有界集是可分的。

〔证明〕 设$A\subset X$为全有界，B_n是是A的有限$\frac{1}{n}$-网，这里的$n=1,2,\cdots$，由定义2，不妨设$B_n\subset A$，又因对每个B_n都是有限集，故

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

是可列集，任取$x\in A$，存在$x_n\in B_n$，使$d(x,x_n)<\frac{1}{n}$，故B中的点列$\{x_n\}$收敛于x，这说明B在A中稠密，故可分。

值得注意的是定理1与定理3的逆命题不真。

例1 对n维欧氏空间R^n来说，全有界性与普通有界是等同的。事实上，如果集A包含于某一立方体之内，我们把

这立方体分成边长不超过$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}$的小立方体，那么这些小立方体的顶点的总体就形成原立方体的一个有限ε网，因而它是这立方体内任何集的有限ε网。

例2 l^2中单位闭球

$$B_1(\theta)=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\ \xi_n,\ \cdots)\mid d(x,\theta)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 1\}$$

是有界集，但不是全有界集。

事实下，设在$B_1(\theta)$上考虑形如

$$e_1=(1,0,0,\cdots)$$

$$e_2=(0,1,0,\cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_i=(0,0,\cdots 1,\cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里任何两点的距离

$d(e_m,e_n)=\sqrt{2}$，由此可见对于任何$\varepsilon<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$B_1(\theta)$不可能有有限ε网。

有了上面全有界集的探讨，我们可以讨论度量空间中的紧性了。

定义3 度量空间X中的无限集A叫做列紧的，是指A中任一无限子集必含有一收敛点列。如果X本身是列紧的，则称X为列紧度量空间，简称为列紧空间。

例3 空间R不是列紧空间，因为自然数列$\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$不包含收敛子列，但是，在$R$中的有界集是列紧

集。

例4 l^2空间不是列紧空间

由例2知l^2中的单位闭球尽管是有界闭集，它却不是列紧集，因为$\{e_n\}$显然没有收敛子列。这说明在度量空间中有界集中任一点列可能没有收敛子列。这是与空间R不同的。

列紧集与列紧空间有如下一些重要性质。

定理4 度量空间X中的点集A是列紧的，那末A必是全有界。反之未必成立。

〔证明〕 用反证法。如果A不是全有界，则必存在正数ε_0，使得A没有有限ε_0网，任取$x_1\in A$，必有$x_2\in A$，使$d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$，否则$\{x_1\}$就是$A$的有限$\varepsilon_0$网。同理，存在$x_3\in A$，使$d(x_i,x_3)\geqslant\varepsilon_0$（$i=1,2$），否则$\{x_1,x_2\}$就是$A$的有限$\varepsilon$网。如此继续下去，于是在$A$中有一点列$\{x_n\}$显然没有收敛子列，这与$A$的列紧性矛盾。

定理5 若X是完备度量空间，则A为X的列紧集的充要条件是：A是全有界集。

〔证明〕 必要性已从定理4得证。下面证明定理的充分性。

X为完备度量空间，$A\subset X$为全有界。设B为A的任一无限子集。任取一个趋于0的正数列$\{\varepsilon_n\}$(例如$\varepsilon=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$)，对ε_1，A有ε_1网，由于B是无限集，因此，B中必有一无限子集，包含在以ε_1网中的某一点为中心，以ε_1为半径的开球中，记这个开球为S_1，于是$B\cap S_1$为无限集。令$B_1=B\cap S_1$，则$B_1\subset S_1$，重复使用以上方法，我们可以找到以ε_2为半径的某个开球S_2，使$B_1\cap S_2$为一无

限集，令$B_2=B_1\cap S_2$，则$B_2\subset S_2$，依此类推，我们便得到一列的无限集$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots$以及一列开球$S_1$，$S_2$，$\cdots$，$S_n$，$\cdots$，其中$S_n$的半径为$\varepsilon_n$，而且$B_n\subset S_n$。

任取$x_1\in B_1, x_2\in B_2-\{x_1\}, x_3\in B_3-\{x_1, x_2\}, \cdots x_n\in B_n-\{x_1, x_2, \cdots x_{n-1}\}, \cdots$，于是我们得到一个点列$\{x_n\}$，由$B_n\subset S_n$以及$B_{n+1}\subset B_n$)$n=1, 2, \cdots$)便知道对于任意的$n$，以及任意的$m>n$，$x_m$与$x_n$都属于球$S_n$中，因此$d(x_m, x_n)<\varepsilon_n(m>n)$，这表明$\{x_n\}$为哥西点列，已知$X$是完备的，故$\{x_n\}$必收敛于$X$中的某一点，即$A$是列紧的。〔证毕〕

由以上两个定理以及全有界集的性质，可知

(i)列紧集必有界；

(ii)列紧集必可分。

最后，我们讨论列紧集与紧集，仍设所考察的集是无限集。

前面我们曾今提到，对于度量空间X本身来说，列紧性与自列紧性没有区别。我们称度量空间中的列紧闭集为自列紧集。

在度量空间中的自列紧集具有下列性质：

定理6 度量空间X中的子集A为自列紧的充要条件是A中的任一点列必含收敛于A中某一点的子列。

其实，设$A\subset X$是自列紧集，$\{x_n\}\subset A$为任一点列，由A的列紧性，$\{x_n\}$中有子列$\{x_{n_k}\}$收敛于某一点$x_0\in X$，再由A的闭性，知$x_0\in A$。

反之，定理的条件成立，则A的一切聚点属于A，且为列紧的，即A是列紧闭集，就是说A为自列紧集。

定理7 自列紧集$A(A\subset X)$本身是完备的度量空间。

因为自列紧集A本身作为一个度量空间是列紧的，因

此，只要证明列紧空间是完备的，该定理也就得到证明了。

设$\{x_n\}$是列紧空间A中的一个基本点列，由A的列紧性，$\{x_n\}$必有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$x_{n_k}\to x_0, x_0\in X$，如果证明$x_n\to x_0$定理7就成立。其实对于任意给定的正数ε，存在着N，使得当$m,n>N$时，

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon \qquad (3\cdot7)$$

取k充分大，使$n_k>N$，在（3.7）中将x_m换成x_{n_k}，则k充分大时，

$$d(x_{n_k},x_n)<\varepsilon \qquad (3\cdot8)$$

因为对每个给定的n，$d(x,x_n)$是x的连续函数，在(3·8)中令$k\to\infty$，使得

$$d(x_0,x_n)\leqslant\varepsilon \quad (n>N)$$

即$\{x_n\}$收敛并以x_0为极限，这就证明了A为自列紧集。

自列紧概念还可以以另一种形式出现，这就是紧性。

定义4 设X为度量空间，A为X中的某个点集，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in N}$是$X$中某些开集组成的族，如果$A\subset\bigcup_{\alpha\in N}G_\alpha$则称$\{G_\alpha\}_{\alpha\in N}$为$A$的一个开覆盖；如果从$A$的任意一个覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in N}$中可以选出有限个开集$G_{\alpha_1}$，$G_{\alpha_2}$，…，$G_{\alpha_n}$使$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}G_{\alpha_k}$，则称$A$为紧集。

如果空间X本身按上述定义是紧的，则称X为紧度量空间或称紧空间。

定理8 设X为度量空间，X中点集A为自列紧的充要条件是它为紧的。证明略。

在本节中，我们引进了四个概念：全有界性、列紧性、自列紧性，并讨论了它们若干性质，希望注意：

1°在一般度量空间中，列紧性强于全有界性，在完备的度量空间中，它们是等价的；在任何度量空间中，自列紧性强于列紧性，而与紧性等价。

2°以上性质都是对无限集来说的，如果要将有限集的情形包括在内，则只要将“无限”两字去掉，而且在用到点列的地方，允许它可以只含有有限个不同的元素（于是有的元素在点列中将出现无限多次），那么，全部概念与论证都是有效的。

习　　题

1．证明实直线是一个度量空间。

2．在全体实数集R上，$d(x,y)=(x-y)^2$定义一个距离吗？

3．证明在全体实数集R上，$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$定义了一个度量空间。

4．证明$C[a,b]$按距离$d(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$为一度量空间。

5．证明l^∞是度量空间。

6．证明一般的三点不等式

$$d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$$

7. 利用三点不等式证明

$$|d(x,y)-d(z,w)|\leqslant d(x,z)+d(y,w)$$

8. 利用三点不等式证明

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$$

9. 证明不等式

$$(|\xi_1|+|\xi_2|+\cdots+|\xi_n|)^2\leqslant n(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2)$$

10. 若(X,d)是一任意度量空间，证明X上的另一个距离是由

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

定义的，并证明距离$\tilde{d}$是有界的。

11. 证明度量空间中二有界集A和B之并是有界集。

12. 求一收敛于0，但是不在任何空间l^p中的序列，其中$1\leqslant p<+\infty$。

13. 设x_0是集合$A\in(X,d)$的一个聚点，证明x_0的任意邻域包含A的无限多个点。

14. 描述下列每一个子集的闭包：(a) R上的整数集；(b) R上的有理数集；(c) 在C中具有有理数的实部和虚部的复数集；(d) 圆盘$\{z|\ |z|<1\}\in C$。

15. 证明$A\subset\overline{A}$；$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

16. 证明$B[a,b]$，($a<b$) 定义在$[a,b]$上的有界函数空间，是不可分的。

17. 证明度量空间X是可分的当且仅当它具有如下性质

的可列子空间Y，对每个$\varepsilon>0$和每个$x\in X$存在一个$y\in Y$使$d(x,y)<\varepsilon$。

18．证明映射T：$X\to Y$是连续的，当且仅当任何开子集$M\subset Y$的原象是X中的开集。

19．证明映射T：$X\to Y$是连续的。当且仅当任何闭子集$M\subset Y$的原象是X中的闭集。

20．举例说明在连续映射下一个开集的象未必是开的。

21．若度量空间中的序列$\{x_n\}$收敛且有极限x_0，证明每个$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$是收敛的且有同样的极限。

22．若$\{x_n\}$是哥西序列，且有一收敛子列，即$x_{n_k}\to x$，证明$\{x_n\}$收敛，其极限为x。

23．证明$x_n\to x$，当且仅当对x的每个邻域$u_\varepsilon(x)$存在一个自然数n_0，使得对所有$n>n_0$的$x_n\in u_\varepsilon(x)$。

24．证明哥西序列有界。

25．若$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是度量空间(X,d)中的哥西序列，证明$\{a_n\}$收敛，这里$a_n=d(x_n,y_n)$。并举例说明。

26．设$X=(X,d)$是度量空间，在X中$x_n\to x$和$y_n\to y$，则$d(x_n,y_n)\to d(x,y)$。

27．若d_1和d_2是同一集X上的距离，且存在正数a和b使得对所有x，$y\in X$

$$ad_1(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant bd_1(x,y)$$

证明在(X,d_1)和(X,d_2)中的哥西序列是同样的。

28．设X是所有有序n实数组$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的空间且$d(x,y)=\max|\xi_i-\eta_i|$，其中$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$证明$(X,d)$是完备的度量空间。

29. 证明所有实数集，若选作距离

$$d(x,y)=|\text{arcctg}x-\text{arcctg}y|$$

则构成一个不完备的度量空间。

30. 设X是所有正整数的集，定义$d(m,n)=|m^{-1}-n^{-1}|$，证明(X,d)不是完备的。

31. 证明序列空间S是完备的。

32. 证明：设X是在$J=[0,1]$上所有连续实值函数的集。且令

$$d(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt$$

函数序列

$$x_n(t)=\begin{cases} n & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & \frac{1}{n^2}<t\leqslant 1 \end{cases}$$

构成一哥西序列，但不收敛。

33. 若(X,d)是完备的，证明$(X,\tilde{d})$是完备的，其中

$\tilde{d}=\dfrac{d}{1+d}$。

34. 在上题中，由$(X,\tilde{d})$的完备性推出(X,d)的完备性。

35. 若在(X,d)中$\{x_n\}$和$\{x'_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x'_n)=0$且$x_n\to l$，证明$\{x_n'\}$收敛且极限亦为$l$。

36. 若$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$是度量空间(X, d)中的收敛序列且有相同的极限l，证明它们满足$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_n')$ $=0$。

37. 设有n个未知量ξ_1，ξ_2，…，ξ_n的n个线性方程构成的方程组。

$$x = Cx + b$$

其中$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$C=(C_{ij})$，$b$为给定的常数。满足条件$\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij} < 1$，则方程组有唯一的解。

提示：按照28题所定义的距离。

38. 37题如果按距离

$$d_1(x, z) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \zeta_i|$$

试证得到的条件为

$$\sum_{i=1}^{n} |C_{ij}| < 1$$

39. 37题如果按距离

$$d_2(x, z) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \zeta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

试证得到的条件为

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}^2 < 1$$

40．试证R^n中点集A为列紧集的充要条件是A为有界集。

41．试证R^n中点集A为自列紧集的充要条件是A为有界闭集。

42．若X是紧的度量空间，且$M\subset X$是闭的，求证M是紧的。

第四章　线性赋范空间与巴拿赫（Banach）空间

我们在度量空间中引进了极限运算，统一了一致收敛、平均收敛、按坐标收敛等极限概念。但这对于分析数学的各个分支来说还有局限性。如果能把极限运算与代数运算结合起来，就可以获得更多的性质。上一章所考察的函数空间和序列空间，实际上也是一个代数系统。当着眼于空间中的代数结构时，就必须引入线性空间（或向量空间）的概念（这在高等代数中已经介绍过)。现在我们着眼于把极限运算结合起来考虑，即研究所谓线性赋范空间。

§4·1　线性空间

在许多数学问题和实际问题中，我们遇到的空间不仅要求有极限运算，而且还要求有所谓的加法和数乘的代数运算。

定义1　设X是一非空集合，在X中定义了元素的加法运算和实数（或复数）与X中元素的乘法运算，满足下列条件：

1．关于加法成交换群，即对任意$x,y\in X$，存在$u\in X$与之对应，记为$u=x+y$，称为x与y的和，满足

（1）　$x+y=y+x$；

（2）　$(x+y)+z=x+(y+z)$；

（3）　在X中存在唯一元素θ，使对任何$x\in X$，$x+\theta=$

x成立，称θ为X中的零元素。

（4） 对X中每个元素x，存在唯一元素$x'\in X$，使$x+x'=\theta$，称x'为x的负元素，记为$-x$。

2．对于X中每个元素x，及任何实数（或复数）a，存在元素$u\in X$与之对应，记为$u=ax$，称为a与x的数乘，满足

（1） $1\cdot x=x$；

（2） $a(bx)=(ab)x$，对任何实数（或复数）a和b成立；

（3） $(a+b)x=ax+bx$；

（4） $a(x+y)=ax+ay$。

则称X按上述加法和数乘运算成为线性空间或向量空间，其中的元素称为向量。如果数乘运算只对实数（复数）有意义，则称X是实（复）线性空间。读者不难证明对所有向量x和数a，有

$$0x=\theta$$

$$a\theta=\theta$$

$$(-1)x=-x$$

有时为了方便起见，仍把零元素θ记为0。

下面举一些线性空间的例子。

例1 n维欧几里得空间R^n，对于R^n中任意两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$和任何实数（复数）$a$，定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n)$$

$$ax=(a\xi_1,\ a\xi_2,\cdots,\ a\xi_n)$$

容易验证R按上述加法和数乘运算成实（复）线性空间。

例2 连续函数空间$C[a,b]$，对$C[a,b]$中任意两个元素x,y和数a，定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)\quad t\in[a,b]$$

$$(ax)(t)=ax(t) \qquad t\in[a,b]$$

则$C[a,b]$按上述加法运算和数乘运算成为线性空间。

一般，设Q为一集，F表示Q上某些函数所成的函数族，在F中按通常方法规定加法和数乘如下：对任何$t\in Q$，令

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \qquad f,g\in F$$

$$(af)(t)=af(t) \qquad f\in F,\ a\text{是数}$$

如果对任何f,g和任何数a，按这样定义的$f+g$和af仍属于F，那末F按上述加法和数乘运算成为线性空间。此后若不另作说明，对函数空间总是采取上述的加法和数乘运算。

例3 空间l^p（$p\geqslant 1$）

设$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n,\cdots)$是实（或复）数列，如果$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty$，则称数列$(\xi_1,\xi_2,\cdots)$是$P$次收敛数列。$P$次收敛数列全体记为$l^p$，称$l^p$空间。对$l^p$中任何两个元素$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$和任何实数(或复数)$a$，定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots)$$

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,\cdots)$$

现在证明这样定义的$x+y$和ax仍属于l^p。事实下，因

$$|\xi_i+\eta_i|^p\leqslant(|\xi_i|+|\eta_i|)^p\leqslant(2\max_i(|\xi_i|,|\eta_i|))^p$$

$$=2^p(\max_i(|\xi_i|,|\eta_i|))^p$$

$$\leqslant 2^p(|\xi_i|^p+|\eta_i|^p)$$

所以$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p \leqslant 2^p(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p+\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p)<\infty$

则 $x+y\in l^p$。容易证明$ax\in l^p$，所以l^p（$p\geqslant 1$）按上述加法与数乘运算成为线性空间。

一般，如果S是由某些实数列（或复数列）所组成的集合，对任何$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in S$，以及任何数$a$，定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots)$$

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,\cdots)$$

若$x+y$，ax仍属于S，则S按上述加法及数乘运算成为线性空间，若不另作说明，在数列空间中，我们总采用上面定义的加法和数乘运算。

对于线性空间，以下几个概念是经常用到的。

设X是线性空间，X_0是X的非空子集，如果对任何x，$y\in X_0$，及任何数a，都有$x+y\in X_0$及$ax\in X_0$，那末X_0按X中加法及数乘运算也成线性空间，称为X的子空间。X和$\{0\}$是X的两个子空间，称为平凡的子空间。若$X\neq X_0$则称X_0是X的真子空间。

设x_1，x_2，…，x_m是线性空间X的向量，a_1，a_2，…，a_m，是m个数（若X为实线性空间，则a_i，$i=1$，2，…，m，为实数，若X为复线性空间，则为复数，以下类同，不另作说明），称$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m$为向量$x_1$，$x_2$，…，$x_m$的一个线性组合。

设M为X的一个非空子集，M中任何有限个向量线性组合的全体记为span$M$，称为由M张成的线性包。容易证明span$M$是X的线性子空间，并且是X中包含M的最小线性

子空间，即若N是X中包含M的最小线性子空间，那么必有$N \supset \mathrm{span} M$。

其实任取$x_k \in M$（$k=1,2,\cdots n$），则$x_k \in N$，故$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \in N$，但$\mathrm{span} M$是形如$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$的一切线性组合组成的集，故 $\mathrm{span} M \subset N$。

定义2 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是线性空间X中的向量，如果存在n个不全为零的数$a_1, a_2, \cdots a_n$使

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$$

则称$x_1, x_2, \cdots, x_n$线性相关，否则称为线性无关。

不难看出$x_1, x_2, \cdots, x_n$线性无关的充要条件为，若$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$，必有$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$。

定义3 设M是线性空间X的一个子集，如果M中任意有限个向量都线性无关，则称M是X中线性无关子集。设M和N为X中两个子集，若M中任何向量与N中任何向量都线性无关，则称M和N线性无关。

线性无关与线性相关所取数域有关，在实数域上线性无关的向量在复数域中可能线性相关

定义4 设X是线性空间，M是X中性无关子集，如果$\mathrm{span} M = X$，则称M的基数为X的维数，记为$\dim X$，M称为X的一组基。如果M的基数为有限数，则称X是有限维线性空间，否则称X是无限维线性空间，如果X只含零元素，称X为零维线性空间。

在线性代数中已经证明，任何有限维空间的维数不随基的不同而改变。

欧氏空间R^n是一n维线性空间，向量组

$$e_1 = (1,0,\cdots,0)$$
$$e_2 = (0,1,\cdots,0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n = (0,0,\cdots,1)$$

构成R^n的一组基，称它为R^n的标准基。

$C[a,b]$是无限维线性空间，事实上，如果$C[a,b]$的所有元素都能表示为n_0个元素$f_1,f_2,\cdots f_{n_0}$的线性组合，那末$1,t,t^2,\cdots,t^{n_0}$都属于$C[a,b]$，这n_0+1个元素都能用$f_1,f_2,\cdots,f_{n_0}$表示出来，即它们是线性相关的。然而众所周知，$1,t,t^2,\cdots t^n$对任何n都是线性无关的，因此，$C[a,b]$只能是无限维的线性空间。

§4·2 线性赋范空间和巴拿赫空间

以上我们引入了线性空间以及有关的概念。但是为了研究从数学或物理中提炼出来的线性或非线性问题，在线性空间中还需引入适当的收敛概念，这一点与线性代数中研究矩阵时的情形是不同的。在线性代数中研究矩阵时，无需引入收敛概念，原因在于那里处理的问题都属于“有限维”的范围内。现在的情况则不同，出现的问题大都属于“无限维”的范围内，因此，收敛概念是不可缺少的，由于我们现在是在线性空间中引入收敛概念，故在引入时应当将它与线性空间中的线性运算结合在一起考虑。因为只有结合在一起，用它来处理具体问题时才能发挥更大的作用。我们只介绍其中一种，即在线性空间中赋以范数，然后在范数的基础上引入

收敛概念。

定义1 设X是实（或复）的线性空间，如果对每个向量$x\in X$有一个确定的实数，记它为$\|x\|$与之对应，并且满足：

（1） $\|x\|\geqslant 0$，且$\|x\|=0$等价于$x=0$；

（2） $\|ax\|=|a|\,\|x\|$，其中a为任意实数；

（3） $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，$x,y\in X$，则称$\|x_n\|$为向量$x$的范数，称$X$按范数$\|x\|$成为线性赋范空间。

设$\{x_n\}$是X中点列，如果存在$x\in X$，使$\|x_n-x\|\to 0$ $(n\to\infty)$则称$\{x_n\}$依范数收敛于x记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \quad 或x_n\to x \quad (n\to\infty)$$

如果令 $d(x,y)=\|x-y\|$ $(x,y\in X)$ 容易验证$d(x,y)$是X上的距离，且$\{x_n\}$依范数收敛于x等价于$\{x_n\}$按距离$d(x,y)$收敛于x。称$d(x,y)$为由范数$\|x\|$导出（或称诱导）的距离，所以线性赋范空间实际上是一种特殊的度量空间，如果$d(x,y)$是由$\|x\|$导出的距离，那么这种距离和线性运算之间有某种关系，即对任何数α和向量$x,y\in X$，有：

$$(1^\circ)\quad d(x-y,0)=d(x,y);$$
$$(2^\circ)\quad d(ax,0)=|a|d(x,0)。\tag{4.1}$$

反之，如果X是线性空间，d是X上距离，并且满足条件1°和2°，那末一定可以在X上定义范数$\|x\|$，使d是由$\|x\|$所导出的距离。事实上，令$\|x\|=d(x,0)$，由条件1°，2°不难证明这样定义的$\|x\|$是范数，且$d(x,y)=\|x-y\|$。条件1°，2°反映了空间的度量结构和线性结构之间具有某种

协调性。

从范数公理出发可以推得以下几个性质：

性质1 设$\{x_n\}$是X中收敛点列，则范数序列$\{\|x_n\|\}$是有界的。

〔证明〕 由不等式

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$$

以及 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$立即导出。

性质2 范数$\|x\|$是$x\in X$的连续函数。

〔证明〕 事实上，对于任何$x, y\in X$，由范数条件（2）和（3），不难证明成立不等式

$$|\|y\| - \|x\|| \leqslant \|y - x\|$$

所以当$\|x_n - x\|\to 0$时，$\|x_n\|\to\|x\|$

性质3 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都是X中收敛点列，$x, y\in X$且有$x_n\to x$，$y_n\to y$，则

$$x_n + y_n \to x + y \quad (n\to\infty)$$

〔证明〕 可由下列不等式导出

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

性质4 设$\{x_n\}$是X中收敛点列，数列$\{\alpha_n\}$收敛于α，则$\alpha_n x_n \to \alpha_n x \quad (n\to\infty)$ 。

〔证明〕 可由下列不等式导出。

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha x\| &\leqslant \|\alpha_n x_n - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha x\| \\ &\leqslant |\alpha_n|\ \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\ \|x\|\end{aligned}$$

性质3，4表明线性运算在X中的收敛意义下是连续的。因此，通过在线性空间中引入范数，就达到了我们把极限运算与代数运算结合起来考虑的目的。

线性赋范空间X按照距离$d(x, y) = \|x - y\|$成为度

量空间，因此，将会出现两种情形：一种是X完备，另一种情形是X不完备。我们将完备的线性赋范空间称为巴拿赫空间。

下面举一些今后常用的线性赋范空间的例子。

例1 n维欧氏空间R^n，对每个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$，定义

$$\|x\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2} \tag{4·2}$$

如果令 $$d(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y=(\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_n)\in R^n$$

则$d(x,y)$即为R^n中欧几里得距离，且满足(4.1)中条件1°及2°，由此可知$\|x\|$是R^n中范数，又因R^n完备，故R^n按(4·2)中范数成巴拿赫空间。

例2 空间$C[a,b]$对每个$x\in C[a,b]$，定义

$$\|x\|=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)| \tag{4·3}$$

容易证明$C[a,b]$按(4·3)中范数成为巴拿赫空间。

例3 空间l^∞，对于每个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$，定义

$$\|x\|=\sup_j|\xi_j| \tag{4·4}$$

不难验证l^∞按(4·4)中范数成巴拿赫空间。

例4 空间$l^p(P\geq1)$按范数$\|x\|^p$成为巴拿赫空间。

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^p$，易知$l^p(P\geq1)$

是线性空间。

令 $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

容易验证 $\|x\|_p$满足范数条件（1）（2），且由闵可夫斯基不等式得

$$\|x+y\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|x\|_p+\|y\|_p$$

满足范数条件（3），所以 l^p 是线性赋范空间，并不难证明也是完备的，即成巴拿赫空间。

为了进一步举例，我们将§3·2中导出的荷尔德不等式与闵可夫斯基不等式的积分形式用范数形式表达出来。

荷尔德不等式　设$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$f\in L^p[a,b]$，$g\in L^q[a,b]$，则$f(t)$，$g(t)$在$[a,b]$上$L$可积，并且下列不等式成立

$$\|fg\|\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$$

其中 $$\|fg\|=\int_a^b|f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|g\|_q=\left(\int_a^b|g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

闵可夫斯基不等式　设$p\geqslant1, f, g\in L^p[a,b]$，则$f+g\in L^p[a,b]$，并且下列不等式成立

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$$

例5　空间$L^p[a,b]$（$p\geqslant1$）　按范数$\|f\|_p$成为线性赋范空间。

事实上，$\|f\|_p$满足范数条件（1）及（2）是显然的，又由闵可夫斯基不等式，当$p\geqslant1$时，对任何f，$g\in L^p[a,b]$有$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$，所以$L^p[a,b]$按范数$\|f\|_p$成线性赋范空间。$L^p[a,b]$也是完备的，故也是巴拿赫空间。

最后让我们考察有限维线性赋范空间的性质。

定理1　设X是n维线性赋范空间，（e_1，$e_2\cdots$，e_n）是X的一组基，则存在常数M和M'，使得对一切

$$x=\sum_{k=1}^n\xi_k e_k$$

成立

$$M\|x\|\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant M'\|x\|$$

〔证明〕　对任意$x\in X$，有

$$\|x\|=\left\|\sum_{K=1}^n\xi_k e_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^n\|e_k\|\,|\xi_k|$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^n\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

记$m=\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则有$\|x\|\leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

任取$y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\in X$，由上述不等式知

$$\left|\|x\|-\|y\|\right|\leqslant\|x-y\|$$

$$\leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这证明范数$\|x\|$是欧氏空间R^n上的连续函数，记

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|x\|$$

当$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 位于单位球面S上，即

$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2=1$时，$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|=\|x\|\neq 0$。

实际上，若$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|=0$，必有$\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k=0$

因$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2=1$，$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$不全为零，再由$\{e_k\}$是线性无关的，获得矛盾。这就是说$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|x\|$在$S$上处处不为零。因$S$是$R^n$中有界集，$\|x\|$在$S$上取得非零的最小值$m'$，$m'>0$，于是，对任意的$x\in X$，作

$$x'=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{-\frac{1}{2}}x$$

则$x'\in S$，因而

$$m'\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x'\|$$

$$= \|x\| \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

令 $M=\frac{1}{m}$, $M'=\frac{1}{m'}$, 即得到结论。〔证毕〕

推论1 设在有限维线性空间上，定义两个范数 $\|x\|$ 和 $\|x\|_1$ 则必存在常数 M 和 M' 使得

$$M\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M'\|x\|$$

〔证明〕 记 $\|x\|_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

其中 $x=\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$，由定理1可知存在正数 K 和 K'，

L 和 L' 有

$$K\|x\| \leqslant \|x\|_0 \leqslant K'\|x\|$$
$$L\|x\|_1 \leqslant \|x\|_0 \leqslant L'\|x\|_1$$

将两式综合起来，令 $M=\frac{K}{L'}$, $M'=\frac{K'}{L}$, 即得结论。〔证毕〕

定义2 设 X 是线性空间，$\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 是 X 上两个范数，如果存在正数 C_1 和 C_2，使得对一切 $x\in X$，成立

$$C_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant C_2\|x\|_2$$

则称范数 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 是等价的。

对两个等价的范数 $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x_n - x\|_1 \to 0$ 和 $\|x_n - x\|_2 \to 0$ 是一致的，因此，我们称 $(X, \|x\|_1)$ 和 $(X, \|x\|_2)$ 这两个线性赋范空间是拓扑同构的。

推论 2 任何有限维赋范空间都和欧氏空间拓扑同构，相同维数的有限维赋范空间彼此拓扑同构。

推论 3 有限维线性赋范空间是完备的，因而是闭的。

推论 4 有限维线性赋范空间中任何有界集是列紧的。

最后，我们在线性赋范空间中引进无穷级数的概念。

定义 3 设 $\{x_n\}$ 是线性赋范空间中的点列，无穷和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots \tag{4.5}$$

为无穷极数，或简称为级数。当其n项和（即部分和）

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

按范数收敛于$x_0 \in X$时，称级数(4.5)是收敛的。x_0称为级数(4.5)的和。当$\{S_n\}$在X中不收敛时，就称级数(4.5)是发散的。

由定义易知，在巴拿赫空间中级数收敛有如下判别法则

定理 2 设X是巴拿赫空间，$\{x_n\}$是X中点列，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛的充要条件是对于任意正数ε，存在正整数N，使得当m、$n > N$时，都有

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \right\| < \varepsilon$$

成立。

另外，数学分析中级数的其它许多概念也不难推广到巴拿赫空间中，例如如果

$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$收敛，则称$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$为绝对收敛。

容易验证，在巴拿赫空间中，绝对收敛的级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$必收敛。

§4·3 线性算子和綫性泛函的定义

我们将研究从线性赋范空间X到另一个线性赋范空间Y中的映射，亦称算子。如果Y是数域，则称这种算子为泛函。算子和泛函我们并不陌生，例如微分算子 $D=\frac{d}{dx}$，就是从连续可微函数空间$C^1[a,b]$到$C[a,b]$上的算子。而黎曼积分$\int_a^b f(t)dt$就是连续函数空间$C[a,b]$上的泛函。如果说函数是数和数之间的对应，那末，算子可以说是函数和函数之间的对应，不过，这是更高一级的对应而已。

定义1 设X和Y是两个同为实（或复）的线性空间，D是X的线性子空间，T为D到Y中的映射，如果对任何$x,y\in D$及数α成立

$$T(x+y)=Tx+Ty \tag{4.6}$$

$$T(\alpha x)=\alpha Tx \tag{4.7}$$

则称T为D到Y中的线性算子，其中D称为T的定义域，记为$D(T)$，T_D称为T的值域，记为$R(T)$。当T取值于实

（或复）数域时，就称T为实（或复）线性泛函。

如果T为线性算子，在(4.7)中取$\alpha=0$，立即可得$T(0)=0$，称为零算子，称集合

$$\{x \mid Tx=0,\ x\in D(T)\}$$

为算子T的零空间，记为$N(T)$。

例1 设X是线性空间，α是一给定的数，对任何$x\in X$，令$Tx=\alpha x$，显然T是X到X中的线性算子，称为相似算子，特别地，当$\alpha=1$时，称为恒等算子，记为I_x，或I。

例2 设$P[0,1]$为$[0,1]$区间上多项式全体，对每一个$x\in P[0,1]$，定义

$$Tx(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$

由求导运算的线性性质，立即可知T是$P[0,1]$到$P[0,1]$中的线性算子，称为微分算子。如果任取$t_0\in[0,1]$，对任何$x\in P[0,1]$，定义

$$f(x_0)=x'(t_0)$$

则f是$P[0,1]$上的线性泛函。

例3 对每个$x\in C[a,b]$，定义

$$Tx(t)=\int_a^t x(\tau)\,d\tau$$

由积分的线性性质，可知T是$C[a,b]$到$C[a,b]$中的线性算子。若令

$$f(x)=\int_a^b x(\tau)\,d\tau$$

则f是$C[a,b]$上线性泛函。

例4 对任何$x\in C[a,b]$，令

$$Tx(t)=tx(t)$$

易知T是线性算子，称其为乘法算子。

例5 设R^n为n维线性空间，在R^n中取一组基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，则对任何$x\in R^n$，x可以唯一地表示成

$$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j,$$

对每个$n\times n$方阵(t_{ij})，作R^n到R^n中算子T如下：

$$\text{当}x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\text{，令}$$

$$y=Tx=\sum_{i=1}^{n}y_i e_i$$

其中 $y_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\xi_j$，$i=1,2,\cdots,n$，显然这样定义的T是线性算子。这个算子在线性代数中称为线性变换。算子T显然由方阵(t_{ij})唯一确定，有时就记为$T=(t_{ij})$。

反过来，设$Te_j=t_{1j}e_1+t_{2j}e_2+\cdots+t_{ij}e_n$，$(J=1,2,\cdots,n)$则当$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$时，由T的线性可得$Tx=\sum_{i=1}^{n}y_i e_i$

这里 $y_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\xi_i$，即T是对应于方阵$(t_{ij})$的算子。

由此可知，在有限维空间上，当基选定以后，线性算子

与矩阵是对应的。

设$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是一组数，当$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$时，定义

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j\xi_j$$

易知f为R^n上线性泛函。反之，如果f是R^n上线性泛函，记$a_j=f(e_j),j=1,2,\cdots,n$,则当 $x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$时、由$f$的线性

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j f(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j a_j$$

由此可见，n维线性空间上，线性泛函与数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$相对应。

§4·4 线性有界算子

定义1 设X和Y是两个线性赋范空间，T是X的线性子空间$D(T)$到Y中的线性算子，如果存在常数C，使得所有$x\in D(T)$有

$$\|Tx\|\leqslant C\|x\| \tag{4.8}$$

则称T是$D(T)$到Y中的线性有界算子，当$D(T)=X$时，称T为X到Y中的线性有界算子，简称为有界算子。

我们最感兴趣的是使(4.8)式对一切$x\in D(T)$成立的“最小”的数C，为此引入下面的基本概念。

定义2 设T为线性赋范空间X的子空间$D(T)$到线性赋范空间Y中的线性算子，称

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{4.9}$$

为算子T在$D(T)$上的范数。

显然，若T是$D(T)$上线性有界算子，则$\|T\|$是一有限数；反之，当$\|T\|<\infty$时，由T的线性，则有

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|, \quad x \in D(T) \tag{4.10}$$

定理1 设T是$D(T)$上线性有界算子，则成立

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| \leqslant 1}} \|Tx\| \tag{4.11}$$

〔证明〕 因为

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \left\| \frac{Tx}{\|x\|} \right\|$$

$$= \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$$

令 $y = \frac{x}{\|x\|}$，则 $\|y\| = 1$，且 $y \in D(T)$，

所以

$$\|T\| \leqslant \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \leqslant \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| \leqslant 1}} \|Tx\| \tag{4.12}$$

反之，若 $x \in D(T)$，$\|x\| \leqslant 1$，则由(4·10)

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\| \leqslant \|T\|$$

所以 $$\sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|\leqslant 1}} \|Tx\|\leqslant\|T\| \tag{4.13}$$

由(4,12)，(4,13)式，得知(4,11)式成立。 〔证毕〕

例1 线性赋范空间X上的相似算子$Tx=\alpha x$是线性有界算子，且$\|T\|=|\alpha|$，特别$\|I\|=1$，$\|0\|=0$。

例2 设$X=C[0,1]$，$K(t,\tau)$是矩形$[0,1]\times[0,1]$上二元连续函数，对每个$x\in C[0,1]$，定义

$$Tx(t)=\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau$$

易知T是$C[0,1]$到$C[0,1]$中线性算子，这个算子称为积分算子，其中函数$k(t,\tau)$称为T的核。又因为

$$|x(t)|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|=\|x\|$$

所以

$$\|Tx\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\right|$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |K(t,\tau)||x(\tau)|\,d\tau$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 K(t,\tau)\,d\tau\|x\|$$

因此 T 是有界算子， 可以证明此时

$$\|T\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |K(t,\tau)|\,d\tau$$

例3 对任何$f \in L[a,b]$作

$$Tf(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau$$

则T为$L[a,b]$到$L[a,b]$中的线性算子。又因为

$$\|Tf\|_1=\int_a^b \left|\int_a^t f(\tau)d\tau\right| dt$$

$$\leqslant \int_a^b \int_a^t |f(\tau)| d\tau dt$$

$$\leqslant \int_a^b |f(\tau)| d\tau \cdot \int_a^b 1 dt$$

$$=(b-a)\|f\|_1$$

所以　$\|T\| \leqslant b-a$，另一方面，对任何使$a+\frac{1}{n}<b$ 的自然数n，作函数

$$f_n(t)=\begin{cases} n & t\in\left[a,\ a+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & t\in\left(a+\frac{1}{n},\ b\right] \end{cases}$$

容易知道，此时$\|f\|_1=1$，而且

$$\|Tf_n\|=\int_a^b \left|\int_a^t f_n(\tau)d\tau\right| dt$$

$$=\int_a^{a+\frac{1}{n}} n(t-a)dt+\int_{a+\frac{1}{n}}^b 1 dt$$

$$=(b-a)-\frac{1}{2n}$$

所以 $\|T\|\geqslant\sup\limits_{n}\|Tf_n\|_1=b-a$，从而 $\|T\|=b-a$。

最后举一个无界算子的例子。

例4 考察微分算子 $Tx(t)=\frac{d}{dt}x(t)$，则若视$P[0,1]$为$C[0,1]$的子空间，令$x_n(t)=t^n$，$\|x_n\|=1$，但$\|Tx_n\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|nt^{n-1}|=n$。所以 $\|T\|\geqslant\|Tx_n\|=n$，即T是无界算子。

下面我们会看到对线性赋范空间中的线性算子而言，有界性与连续性是等价的。

设X和Y是两个线性赋范空间，T是X到Y的线性算子。如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$\|x-x_0\|<\delta$时，都有

$$\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$$

则称T在$D(T)(\subset X)$上连续，此时就称T是连续算子。

类似地，也有一致连续性的概念：如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在只依赖于ε的$\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何的x_1，$x_2\in D(T)$，只要 $\|x_1-x_2\|<\delta$，都有

$$\|Tx_1-Tx_2\|<\varepsilon$$

成立，则称T在$D(T)$上是一致连续的。

线性算子的连续性同样可以用序列极限的形式来表述。我们有如下的定理

定理2 T是线性赋范空间X到Y中线性算子，T在$x_0\in X$ 连续的充要条件对X中收敛于x_0的任何向量序列

$\{x_n\}$都有$\{Tx_n\}$收敛于Tx_0，即当 $x_n \to x_0$ 时， 都 有 $Tx_n \to Tx_0$ （$n\to\infty$） 。

下面我们给出线性算子的有界性与连续性的等价定理。

定理 3 设T是线性赋范空间X到线性赋范空间Y中的线性算子，则T为有界算子的充要条件为T是X上连续算子。

〔证明〕 若T有界，由(4.8)式，当 $x_n \to x$时，因为

$$\| Tx_n - Tx \| \leqslant C \| x_n - x \|$$

所以$\| Tx_n - Tx \| \to 0$，即 $Tx_n \to Tx$，同时T连续。

反之，若T在X上连续，则T在点$0\in X$连续，对$\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|x\| = \|x-0\| < \delta$时，都有

$$\| Tx - T0 \| == \| Tx \| < \varepsilon = 1$$

设任意$x\in X$，$x \neq 0$,则$\frac{\delta x}{\|x\|} \in B_\delta(0)$ （因 $\| \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \| = \frac{\delta}{2} < \delta$），因此

$$\| T \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \| = \frac{\delta}{2\|x\|} \| Tx \| < 1$$

从而对任意$x\in X$，都有

$$\| Tx \| < \frac{2}{\delta} \| x \|$$

即T是有界算子。 〔证毕〕

线性赋范空间中的线性算子的有界性与连续性等价这一特性是线性算子理论上与应用中最常用的结果之一，它是由算子本身的线性及空间拓扑的线性所决定的。

例5 富里叶变换$y(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}x(t)\,dt$

可以看成是空间$L(-\infty, +\infty)$到空间$C(-\infty, +\infty)$的算子。

设 $Tx(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}x(t)\,dt$，$x\in L(-\infty,$

$+\infty)$，$\|x\|=\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt$

易知 $|y(s)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ist}|\,|x(t)|\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt=\|x\|$$

因此 $\|Tx\|=\|y\|=\sup_s y(s)\leqslant\|x\|$

且由 $|y(s+h)-y(s)|$

$$=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(e^{iht}-1)e^{ist}\,dt\right|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,|e^{ist}-1|\,dt$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,\left|\sin\frac{ht}{2}\right|\,dt$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{-\infty} |x(t)|\,dt + 2\int_{\beta}^{+\infty} |x(t)\,dt$$

$$+h\beta\int_{-\infty}^{\beta} |x(t)|\,dt$$

因$x(t)$是L可积函数，故可取β足够大，使上式右端前两项之和小于$\frac{\varepsilon}{2}$，取定β后，再取ε足够小，使上式右端第三项小于$\frac{\varepsilon}{2}$，即

$$|y(s+h)-y(s)|<\varepsilon$$

因而$y(s)=Tx$是$(-\infty,+\infty)$中的连续函数。因为T是$L(-\infty,+\infty)$到$C(-\infty,+\infty)$中的线性算子，也就是著名的富里叶变换。又由于$\|Tx\|\leqslant\|x\|$，故知$\|T\|\leqslant 1$，即富里叶变换T是有界线性算子，也就是连续线性算子。

§4·5 线性算子空间

在§4·4中我们研究了单个线性算子的性质，如有界的充分必要条件，连续的充分必要条件，有界性与连续性的关系等等。现在我们要从更高的角度来考察有界线性算子。将从一个线性赋范空间X到另一个线性赋范空间Y中的每一个有界线性算子看成一个元素，所有这些元素构成的集用$B(X\to Y)$表示。

设A和B属于$B(X\to Y)$，α是所讨论数域中的数时，定义$B(X\to Y)$中的加法运算及数乘运算如下：

对任何$x\in X$，令

$$(A+B)x=Ax+Bx \tag{4·13}$$

$$(\alpha A)x=\alpha Ax \tag{4·14}$$

下面证明$B(X\to Y)$按上述线性运算及算子范数成为线性赋范空间。事实上，如果A、B$\in B(X\to Y)$，则对任何$x\in X$，由算子加法定义，

$$\begin{aligned}\|(A+B)x\| &= \|Ax+Bx\|\leqslant\|Ax\|+\|Bx\|\\ &\leqslant\|A\|\,\|x\|+\|B\|\,\|x\|\\ &=(\|A\|+\|B\|)\|x\|\end{aligned} \tag{4·15}$$

由于A及B是有界算子，所以$\|A\|+\|B\|<\infty$，由此可知 $A+B\in B(X\to Y)$，并且成立不等式

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\| \tag{4·16}$$

又对任何α显然有

$$\|\alpha A\|=\sup_{\|x\|=1}\|(\alpha A)x\|=\sup_{\|x\|=1}\|\alpha Ax\|$$

$$=|\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|=|\alpha|\,\|A\|$$

由此得到 $\alpha A\in B(X\to Y)$且 $\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|$ 。最后，$\|A\|=0$的充要条件为对于任何$x\in X$，$Ax=0$，即$A=0$。因此$B(X\to Y)$按上述加法及数乘运算和算子范数成为线性赋范空间。

今后称$B(X\to Y)$为线性算子空间。

在§4·2中，我们定义了线性赋范空间中点列依范数收敛的概念，这个概念对$B(X\to Y)$无疑是适用的。

定义1 设T，$T_n(n=1,2,\cdots)\in B(X\to Y)$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$$

则称算子序列$\{T_n\}$按范数收敛于T，也可称$\{T_n\}$一致

收敛于T。

定义2 设$T, T_n (n=1,2,\cdots)\in B(X\to Y)$，如果对每个$x\in X$，

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n x - T x\| = 0$$

则称算子序列$\{T_n\}$强收敛于T。

定理1 设$T, T_n (n=1,2,\cdots)\in B(X\to Y)$，则任一$\{T_n\}$依算子范数收敛于T的充要条件是$\{T_n\}$在$X$中的有界集上一致收敛于T。

〔证明〕 必要性：设$\lim\limits_{n\to\infty} \| T_n - T \| = 0$，设$E\subset X$为有界集，对于$E$存在正数$K$使得当$x\in X$时，$\|x\|\leqslant K$，故

$$\| T_n x - T x \| \leqslant \| T_n - T \| \, \| x \| \leqslant K \| T_n - T \| \tag{4.16}$$

任给正数$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得当$n>N$时，$\| T_n - T \| < \frac{\varepsilon}{K}$，于是由(4.16)，得到

$$\| T_n x - T x \| < \varepsilon$$

对于$x\in E$一致地成立，即$\{T_n\}$在E上一致收敛于T。

充分性：设$\{T_n\}\in B(X\to Y)$在X中的任一有界集上一致收敛于$T\in B(X\to Y)$，取X中的单位球面$S=\{x \mid \|x\|=1, x\in X\}$，根据假定，对任意的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得当$n>N$时，

$$\| T_n x - T x \| < \varepsilon$$

对于S一致地成立，于是

$$\| T_n - T \| = \sup_{\|x\|=1} \| T_n x - T x \| \leqslant \varepsilon$$

$(n>N)$

即$\{T_n\}$依范数收敛于T，〔证毕〕

定理2 设T，$T_n(n=1,2,\cdots)\in B(X\to Y)$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx-Tx\|=0$$

〔证明〕 当$\|T_n-T\|\to 0$时，，对任意$x\in X$，有

$\|T_nx-Tx\|=\|(T_n-T)x\|\leqslant\|T_n-T\|\,\|x\|\to 0$

故得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx-Tx\|=0$

反之未必成立，这可以下面反例看出。

例如设$X=Y=l^2$，T_n为$B(X\to Y)$中如下定义的算子：

$$T_n(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,0,\cdots,\xi_{n+1},\ \xi_{n+2}\cdots)$$

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2,n=1,2,\cdots$$

显然，每个T_n是线性算子，并且$\|T_n\|\leqslant 1$，这时

$$\|T_nx-0\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\to 0$$

即$\{T_n\}$强收敛于0，但$\{T_n\}$不一致收敛于0。事实上，对任意的自然数n，令

$$e_{n+1}=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n个},1,0,\cdots)\quad n=1,\ 2,\cdots$$

则$\|e_{n+1}\|=1$，但$T_ne_{n+1}=e_{n+1}$，故 $\|T_n\|\geqslant 1$，因此$\|T_n\|=1$，不收敛于0，即$\{T_n\}$不一致收敛于0。

一般说，$B(X\to Y)$作为线性赋范空间，不一定是完备

的，但若Y完备，则有下面的

定理3 当Y是巴拿赫空间时，$B(X\to Y)$也是巴拿赫空间。

〔证明〕 设$\{T_n\}$为$B(X\to Y)$中的哥西点列，即对任意正数$\varepsilon>0$，存在着自然数N，当n，$m>N$时

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon$$

于是对每个$x\in X$，当n，$m>N$时，成立

$$\|T_nx-T_mx\|=\|(T_n-T_m)x\|$$
$$\leqslant\|T_n-T_m\|\,\|x\|<\varepsilon\|x\| \tag{4.17}$$

所以当x固定时，点列$\{T_nx\}$是Y中的哥西点列，由Y的完备性，存在$y\in Y$，使$T_nx\to y\ (n\to\infty)$，作X到Y中算子T如下，对每个$x\in X$，令

$$Tx=y=\lim_{n\to\infty}T_nx$$

容易知道T是X到Y中的线性算子。在(4.17)中令$m\to\infty$，由范数连续性，得到，当$n>N$时，对X中所有x成立

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon\|x\|$$

由于ε不依赖于x，所以

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|(T_n-T)x\|\leqslant\varepsilon \tag{4.18}$$

即$T_n-T\in B(X\to Y)$，又因$B(X\to Y)$是线性空间，所以

$$T=T_n+(T-T_n)\in B(X\to Y)$$

并由(4.18)知$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$，这就证明了$B(X\to Y)$是巴拿赫空间。 〔证毕〕

§4·6 有界线性泛函与共轭空间

我们知道，所谓线性赋范空间X到线性赋范空间Y中的线性算子 T，即X到Y中的映射。如果Y是数域（实或复）则这种映射称为线性泛函，故线性泛函不过是线性算子的特例。因而有界线性泛函是有界线性算子的特例。而线性算子空间$B(X\to Y)$是指X到Y中线性有界算子全体所组成的线性赋范空间，如Y是数域，我们有下面的

定义1 设X是线性赋范空间，X上全体有界线性泛函组成的线性赋范空间 $B(X\to K)$ 称为X的共轭空间，记为X^*（这里的K是R或C与Y是实(或复)是一致的)。

定义2 设f是线性赋范空间$D(f)$到数域K中的线性泛函。如果存在实数C，使得对所有的$x\in D(f)$，成立

$$|f(x)|\leqslant C\|x\| \tag{4·19}$$

称f是$D(f)$上的有界线性泛函。

定义3 设f是线性赋范空间$D(f)$到数域K中的线性泛函，称

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in D(f)\\ \|x\|\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in D(f)\\ \|x\|=1}}|f(x)|$$

$$=\sup_{\substack{x\in D(f)\\ \|x\|\leqslant 1}}|f(x)| \tag{4·20}$$

为泛函 f 的范数，注意到§4·4(4·10)式，故有

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\ \|x\| \tag{4·21}$$

对于线性泛函f,同样有连续性与有界性等价的定理，即

定理1 设 f是线性赋范空间X到数域 K中的线性泛

函，则f为有界泛函的充要条件为f是X上的连续泛函。

例1 空间$C[a,b]$，如果选取固定的$t_0\in[a,b]$，令

$$g(x)=x(t_0) \qquad x\in C[a,\ b]$$

则得到一个定义在$C[a,b]$上的泛函，则g是线性有界的，且$\|g\|=1$。

事实上，有$|g(x)|=|x(t_0)|\leqslant\|x\|$

由 $\|f\|=\sup\limits_{\substack{x\in D(f)\\ \|x\|=1}}|f(x)|$，导致$\|g\|\leqslant1$。

另一方面，对于$x_0=1$，有$\|x_0\|=1$，而由(4·21)可得

$$\|g\|\geqslant|g(x_0)|=1$$

所以有 $\|g\|=1$

例2 设f，g是$C[a,b]$到R上的泛函，定义为

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$g(x)=x(t_0) \qquad t_0\in[a,b]$$

则f，g是$C[a,b]$上有界线性泛函，且

$$\|f\|=b-a,\quad \|g\|=1$$

事实上，f，g显然都是线性泛函，又

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)\right|\leqslant\int_a^b|x(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$$

$$=(b-a)\|x\|$$

因此$\|f\|\leqslant b-a$。

另一方面，为了得到$\|f\|\geqslant b-a$，选取$x=x_0=1$，

$\|x_0\|=1$，故有

$$b-a=\int_a^b x_0(t)\mathrm{d}t=f(x_0)\leqslant\|f\|\ \|x_0\|=\|f\|$$

从而得

$$\|f\|=b-a$$

至于 $\|g\|=1$，例1已证。

对于线性泛函的连续性，我们还有下面的定理。

定理2 设X是线性赋范空间，f是X上线性泛函，那末f是X上连续泛函的充要条件为f的零空间$N(f)$是X中的闭子空间。

〔证明〕 必要性：设f是X上连续线性泛函，当$x_n\in N(f)$，$n=1$、$2\cdots\cdots$，并且$x_n\to x$时，由f的连续性，有$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，因此$x\in N(f)$，所以$N(f)$是闭的。

充分性：设$N(f)$是闭子空间，如果f不是有界的，那末$\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|=+\infty$，因此，必有一点列$\{x_n\}$，适合

$\|x_n\|=1$，$|f(x_n)|\geqslant n$。

作
$$y_n=\frac{x_n}{f(x_n)}-\frac{x_1}{f(x_1)}$$

那末$f(y_n)=0$，因此，$y_n\in N(f)$，然而由于

$$\left\|\frac{x_n}{f(x_n)}\right\|=\frac{1}{f(x_n)}\to 0$$

这样就得到$y_n\to-\dfrac{x_1}{f(x_1)}$，但是$f\left(\dfrac{-x_1}{f(x_1)}\right)=-1$，即

$\dfrac{-x_1}{f(x_1)}\overline{\in}N(f)$，这与$N(f)$为闭子空间的性质矛盾，因此$f$

是有界的。〔证毕〕

因为R(或C)是以绝对值(或复数的模)

$$\| y \| = |y|$$

为范数的巴拿赫空间，设$f \in X^*$，故以泛函f的范数$\| f \|$构成一个线性赋范空间$X^* = B(X \to K)$由定理3(§4.5)知X^*也是巴拿赫空间。即得

定理3 任何线性赋范空间的共轭空间是巴拿赫空间。

为了应用泛函分析的一般理论于具体场合，如果能知道具体空间上线性连续泛函的一般形式，即具体了解一个线性赋范空间X的共轭空间X^*中每个元素的形式将是重要的。下面我们将把一些常用的空间如l^∞、l^p、$L^p[a,b]$等等的共轭空间表示出来。为此，首先引入两个线性赋范空间同构的概念。

定义4 设X和Y是两个线性赋范空间，T是X到Y中的线性算子，并且对所有$x \in X$，有

$$\| Tx \| = \| x \|$$

则称T是X到Y中的保距算子，如果T又是映射到Y上的，则称T是同构映射，此时，称XY为同构。

显然保距算子是一对一的，而同构映射是等距映射。由于同构映射保持线性运算及范数不变，所以撇开X和Y中点的具体内容，可以将X及Y看成同一抽象空间而不加以区别，在这个意义下，可以认为$X = Y$。

例3 R^n的共轭空间$(R^n)^*$等距同构于R^n即

$$(R^n)^* = R^n$$

〔证明〕 设$f \in (R^n)^*$，在R^n中取一组基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$其中$e_i = (0、0、\cdots, 0、\underset{\text{第}i\text{位}}{1}、0、\cdots 0)$

令$f(e_i)=\alpha_i$，则f在R^n中有唯一的向量$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$与之对应。

令T是$(R^n)^*$到R^n上线性算子，$Tf=\alpha$，对任意$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in R^n$有

$$f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i \tag{4.22}$$

由$P=2$时的荷尔德不等式

$$|f(x)|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|\alpha\|\,\|x\|$$

因此，$\|f\|\leqslant\|\alpha\|$ 又由

$$f(\alpha)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\|\alpha\|^2$$

$$\|\alpha\|^2\leqslant\|f\|\,\|\alpha\|$$

得 $\|\alpha\|\leqslant\|f\|$

从而有 $\|f\|=\|\alpha\|=\|Tf\|$

因T是$(R^n)^*$到R^n上的线性算子，对任意$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in R^n$，由$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i$定义了线性泛函$f\in(R^n)^*$，

因此，T是$(R^n)^*$到R^n上的等距同构映射，也即$(R^n)^*$与R^n是等距同构的。即

$$(R^n)^*=R^n$$

且(4.22)称为R^*上有界线性泛函的表示。

例4 l^1的共轭空间等距同构于l^∞，即

$$(l^1)^* = l^\infty$$

〔证明〕设$f\in(l^1)^*, e_i=(0,0\cdots,0,1,0\cdots)\in l^1 (i=1,2 \cdots)$

令 $f(e_i)=\eta_i (i=1,2,\cdots)$，对于所有的$i$，有

$$|\eta_i|=|f(e_i)|\leqslant\|f\|\ \|e_i\|=\|f\|$$

因此 $\sup|\eta_i|\leqslant\|f\|$

也即$y=(\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^\infty$。

令T为$(l^1)^*$到l^∞上的线性算子，$Tf=y$，则

$$\|y\|=\|Ty\|\leqslant\|f\|$$

另一方面 由于f的连 续线与线性，对任意的

$x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\in l^1$有

$$f(x)=f(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i \tag{4.23}$$

$$|f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|<\sup|\eta_i|\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|$$

$$=\sup_i|\eta_i|\ \|x\|_{l^1}$$

$$=\|y\|_{l^\infty}\|x\|_{l^1}$$

因此 $\|f\|\leqslant\|y\|_{l^\infty}=\|Tf\|_{l^\infty}$

从而 $\|f\| = \|y\|_{l^\infty} = \|Tf\|_{l^\infty}$

又显然T是$(l^1)^*$到l^∞上线性算子，因对任意的$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots) \in l^\infty$上等距同构映射，也即$(l^1)^*$与$l^\infty$是等距同构的，故

$$(l^1)^* = l^\infty$$

并且称(4·23)是l^1上有界线性泛函的表示。

例 5 $l^p(1<p<+\infty)$的共轭空间为l^q，其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

〔证明〕 仍令$e_i=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)\ i=1,2\cdots$
$e_i \in l^q$，且$\|e_i\|=1$，对每个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\cdots)\in e^p$，

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$$

设$f\in(l^p)^*$，令$f(e_i)=\eta_i(i=1, 2,\cdots)$，$y=(\eta_1, \eta_2,\cdots)$我们先证$y\in l^q$，由于$f$是线性连续泛函，所以

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i$$

若$f=0$，则$\eta_i=0, i=1,2,\cdots$所以不等式

$$(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q)^{\frac{1}{q}})\leqslant\|f\|$$

自然成立，若$f\neq 0$，则η_i不全为0，对任何自然数n，令

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}(|\eta_i|^{q-1}\text{sgn}\eta_i)e_i$$

显然$x_n \in l^p$，有

$$f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{q-1}\operatorname{sgn}\eta_i f(e_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q \leqslant \|f\|\ \|x_n\|_{l^p}$$

注意到 $\|x_n\|_{l^p}=\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{p(q-1)}\right)^{\frac{1}{p}}$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

于是 $\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$

令$n\to\infty$得

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$$

令T是$(l^p)^*$到l^q的线性算子，$Tf=y$，则

$$\|y\|_{l^q}=\|Ty\|_{l^q}\leqslant\|f\|$$

另一方面，对任意$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\in l^p$，有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i \qquad (4\cdot24)$$

$$|f(x)|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \| y \|_{l^q} \| x \|_{l^p}$$

因此， $\| f \| \leqslant \| y \|_{l^q}$，从而有

$$\| Tf \| = \| y \|_{l^p} = \| f \|$$

显然T是$(l^p)^*$到l^q上的线性算子，因为对任意$y \in l^q$由(4.24)唯一确定了l^p上的有界线性泛函f，因而T是$(l^p)^*$到l^q上的等距同构映射，也即$(l^p)^*$与l^q是等距同构的故

$$(l^p)^* = l^q \ (1 < p < +\infty) \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

并称（4·24）为l^p上有界线性泛函的表示。

以下两例因为证明比较复杂，我们只是列举如下。

例6 $(L[a,b])^* = L^\infty[a,b]$，也就是说$L[a,b]$的共轭空间与$L^\infty[a,b]$是等距同构的，任一$f \in [L[a,b]]^*$，存在唯一的本性有界可测函数$y(t) \in L^\infty[a,b]$，使得任意的$x(t) \in L[a,b]$有

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) \mathrm{d}t \tag{4·25}$$

且 $\| f \|_{(L)^*} = \| y \|_{L^\infty}$

其中（4·25）称为$L[a,b]$上有界线性泛函的表示

例7 $(L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$（$1 < p < +\infty$、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$）

也即$L^p[a,b]$的共轭空同与$L^q[a,b]$是等距同构的。对任意$f \in L^p$，存在唯一的$y(t) \in L^q[a,b]$,使得对任意$x(t) \in L^p[a,b]$，有

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.26}$$

且 $\quad \|f\|_{(L^p)^*}=\|y\|_{L^q}$

其中（4.26）称为$L^p[a,b]$上有界线性泛函的表示。

共轭空间的理论，尤其是一些常见的空间上有界线性泛函的表示在泛函分析理论上与应用中都很重要。因为许多物理系统的状态常能用某个巴拿赫空间上的有界线性泛函来描述，也即状态空间常常是某个空间的共轭空间，另外在线性泛函理论上往往可以通过共轭空间X^*的性质来推出X的性质。所以共轭空间的理论有着重要意义。

§4·7 泛函延拓定理

§4.6对一些具体的空间找出了它们的共轭空间的具体形式及其上有界线性泛函的一般表示。现在的问题是：任何非零线性赋范空间上是否有非零线性连续泛函？如果有，是否有足够多？即在一个子空间（那怕是有限维子空间）上线性连续泛函是否可以延拓成为整个空间上的线性连续泛函而保持范数不变？这些都是泛函分析中最基本问题。正是我们下面将要介绍的著名的汉恩－巴拿赫(Hahn－Banach)有名的线性泛函延拓定理及其推论要回答的问题。

定理（汉恩—巴拿赫泛函延拓定理） 设X是线性赋范空间，Z是X的子空间，f是Z上的有界线性泛函，则f可以保范地延拓到整个X上，也就是说，在X上存在着有界线性泛函F，使得满足

(1)对任意$x\in Z$，$F(x)=f(x)$

(2) $\| F \| = \| f \|_z$

这里$\| f \|_z$表示f作为Z上有界线性泛函的范数。

关于定理的证明涉及到许多知识，要用较大的篇幅，这里略述。

下面介绍汉恩-巴拿赫定理的几个推论，它们与定理本身一样，在理论上和应用中常被引用。

推论1 设X是线性赋范空间，$x_0 \in X, x_0 \neq 0$. 则必存在X上的线性有界泛函$f(x)$. 使得$\| f \| = 1$, 并且$f(x_0) = \| x_0 \|$

〔证明〕 我们考虑X中一维子空间$X_1 = \{ \alpha x_0 | \alpha$为复数$\}$在$X_1$上定义泛函

$$f_1(x) = f_1(\alpha x_0) = \alpha \| x_0 \|$$

其中 $x = \alpha x_0 \in X_1$

显然是线性泛函，又因为

$|f_1(x)| = |\alpha| \| x_0 \|$, 故$f_1$是$X_1$上有界线性泛函，并且$\| f_1 \|_{X_1} = 1$。由泛函延拓定理，存在整个空间$X$上有界线性泛函$f$，它是$f_1$的延拓，并且$\| f \|_X = \| f \|_{X_1} = 1$. 特别取$x = x_0 \in X$，所以有$f(x_0) = f_1(x_0) = \| x_0 \|$。

由推论1可以看出：

1°对任何线性赋范空间$X \neq \{0\}$，必存在“足够多”的非零有界线性泛函；

2°如果对于X上的一切有界线性泛函f，有$f(x_0) = 0$则$x_0 = 0$。

因此，为了判断X中的元素x_0是否零元，只要判断X上的一切有界线性泛函f对x_0作用得到的值$f(x_0)$是否都等于零就行了。

推论2 设G是线性赋范空间X的子空间，$x_0 \in X$、若

$$d(x_0,G)=\inf_{x\in G}\|x_0-x\|=d>0$$

则必存在X上的有界线性泛函f，使

（1）当$x\in G$时，$f(x)=0$；

（2）$f(x_0)=1$

（3）$\|f\|=\frac{1}{d}$

〔证明〕 令$G_1=\{\alpha x_0+x|_{\alpha\in K, x\in G}\}$

则G_1是X的子空间，再令

$$f(\alpha x_0+x)=\alpha$$

那么f是G_1上唯一的有界线性泛函，满足：

$$f(x_0)=1；\ 对x\in G，f(x)=0$$

（这是因为$f(\alpha x_0+x)=\alpha f(x)+f(x)=\alpha$的缘故）。

注意到$\|\alpha x_0+x\|=|\alpha|\|x_0+\frac{x}{\alpha}\|\geqslant|\alpha|d$

即 $$|f(\alpha x_0+x)|=|\alpha|\leqslant\frac{1}{d}\|\alpha x_0+x\|$$

因此 $$\|f\|_{G_1}\leqslant\frac{1}{d} \qquad (4.27)$$

另一方面，我们取$x_n\in G$（$n=1,2\cdots$），使

$\|x_0-x_n\|\to d$（$n\to\infty$）

于是$\|f\|_{G_1}\|x_0-x_n\|\geqslant|f(x_0-x_n)|=|f(x_0)|=1$

故 $$\|f\|_{G_1}\geqslant\frac{1}{\|x_0\quad x_n\|}$$

令$n\to\infty$，则得到

$$\|f\|_{G_1}\geqslant\frac{1}{d} \qquad (2.28)$$

由(4·27)(4·28)，$\|f\|_{G_1}=\frac{1}{d}$，再由泛函延拓定理，f可以延拓到整个空间X上，且延拓后的泛函范数与$\|f\|_G$相等，为简单起见，将延拓后的泛函仍记为f，则经过延拓后的f便满足推论2的三个条件。

在推论2中若令$f_1=df$，则$\|f_1\|=1$，$f_1(x_0)=d$于是推论2可以写成

推论2′ 设G是线性赋范空间X的子空间，$x_0\in X$，若

$$d(x_0, G)=\inf_{x\in G}\|x_0-x\|=d$$

则存在X上线性有界泛函f_1，使

（1）当$x\in G$时，$f_1(x)=0$；

（2）$f_1(x_0)=d$；

（3）$\|f_1\|=1$

推论3 设X是线性赋范空间，对于任意$x\in X$，都有

$$\|x\|=\sup_{\substack{f\in X^* \\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|} \tag{4·29}$$

〔证明〕 对任意的$f\in X^*$，$x\in X$，由

$$|f(x)|\leqslant\|f\|_{X^*}\|x\|_X$$

可得 $$\|x\|_X\geqslant\sup_{f\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{X^*}}$$

另一方面，对任一非零向量$x\in X$，($x=0$，(4·27)显然成立)，由推论1，存在$f_1\in X^*$，使得

$$\|f_1\|_{X^*}=1,\quad f_1(x)=\|x\|$$

因此 $$\sup_{f\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{X^*}}\geqslant\frac{|f_1(x)|}{\|f_1\|}=\|x\|_X$$

于是得到

$$\|x\|=\sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

推论3告诉我们，X中向量x的范数$\|x\|$也可用共轭空间中的元素f来表示，即（4·29）式。这反映了X的性质研究往往可以转化为其共轭空间X^*的研究，这就是所谓对偶的理论与方法，这种方法是泛函分析中经常使用的。

§4·8 共轭算子

有了共轭空间概念，便可以引入共轭算子的概念。共轭算子是矩阵转置概念的推广。

设X、Y是两个线性赋范空间，X^*和Y^*分别是X和Y的共轭空间，T是X和Y中的线性有界算子。今对任何$g\in Y^*$可以如下定义X上的泛函f：

$$f(x)=g(\mathrm{T}x) \tag{4·30}$$

这个泛函显然是线性的，由于

$$\begin{aligned}|f(x)|=|g(\mathrm{T}x)|&\leqslant\|g\|\ \|\mathrm{T}x\|\\ &\leqslant\|g\|\ \|\mathrm{T}\|\ \|x\|\end{aligned}$$

故f也是有界线性泛函，即$f\in X^*$，于是我们建立起了$g\to f$的对应，即由T派生出一个从Y^*到X^*的算子T^*，使$\mathrm{T}^*g=f$，称T^*为T的共轭算子

定理1 线性有界算子T的共轭算子T^*也是线性有界算子，并且$\|\mathrm{T}^*\|=\|\mathrm{T}\|$。

〔证明〕 对任何g_1、$g_2 \in Y^*$及数α、β由T^*的定义、有

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2)(x) = (\alpha g_1 + \beta g_2)(Tx)$$
$$= \alpha g_1(Tx) + \beta g_2(Tx)$$
$$= \alpha T^* g_1(x) + \beta T^* g_2(x)$$
$$= (\alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2)(x)$$

所以$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2$，即$T^*$是线性算子。

又由前述，对所有$f \in X^*$及$x \in X$，有

$$|f(x)| \leqslant \|g\| \|T\| \|x\|$$

即
$$\|T^* g(x)\| \leqslant \|g\| \|T\| \|x\|$$

所以
$$\|T^* g\| \leqslant \|g\| \|T\|$$

故T^*是有界算子，且$\|T^*\| \leqslant \|T\|$。

现在用泛函延拓定理来证$\|T\| \leqslant \|T^*\|$。

事实上，对任何$x \in X$，若$Tx \neq 0$，则必有$x \neq 0$，由泛函延拓定理的推论1，对这个T^*，必有$g \in Y^*$，满足$\|g\| = 1$，并且满足$g(Tx) = \|Tx\|$。于是

$$\|Tx\| = g(Tx) = (T^* g)(x) \leqslant \|T^* g\| \|x\|$$
$$\leqslant \|T^*\| \|g\| \|x\| = \|T^*\| \|x\|$$

而当$Tx = 0$时，上面不等式自然成立，故对一切$x \in X$都有

$$\|Tx\| \leqslant \|T^*\| \|x\|$$

这就证明了$\|T\| \leqslant \|T^*\|$，从而$\|T\| = \|T^*\|$，〔证毕〕

例1 设T是空间R^n到R^m中的线性算子，T可以表示成唯一地一个$m \times n$阶矩阵$(a_{ij})_{m \times n}$

$$设 x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in R^n$$
$$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) \in R^m$$

则$y = Tx$，可以用矩阵表示如下：

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m3} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

设T^*是$(R^n)^*=R^n$到$(R^m)^*=R^m$中的线性算子。

令　$g=(g_1、g_2、\cdots,g_m)\in(R^m)^*$

$$T^*g=f=(f_1、f_2、\cdots,f_n)\in(R^n)^*$$

那末应有

$$f(x)=T^*g(x)=g(Tx)=g(y)$$

由R^n和R^m上有界线性泛函表示可知

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f_i,$$

$$g(y)=\sum_{i=1}^{m}\eta_i g_i$$

即

$$(\eta_1、\eta_2\cdots,\eta_m)\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_m\end{pmatrix}=(\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}$$

$$T^*g(x)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)(a_{ij})^T\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_m\end{pmatrix}$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}$$

因此有

$$f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}=Tg^*=(a_{ij})^T\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

这表明，T^*的矩阵为T 的矩 阵（a_{ij}）的转置矩阵，因此，可见共轭算子是转置矩阵的概念的推广。

例2 设$K(S,t)$是$a\leqslant S,t\leqslant b$上有界可测函数，令

$$Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L^q[a,b]$$易知 T

是$L^q[a,b]\to L^p[a,b]$的有界线性算子，求T^*

〔解〕 因对任取的$g\in L^p[a,b]^*$,存在 着$\beta(s)\in L^q[a,b]$,使

$$g(Tx)=\int_a^b \beta(s)[\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}S$$

$$=\int_a^b [\int_a^b K(s,t)\beta(s)\mathrm{d}S]x(t)\mathrm{d}t$$

$$=T^*g(x)$$

所以求得 $\quad T^*g=\int_a^b K(s,t)\beta(S)\mathrm{d}S$

最后我们介绍一下二次共轭空间并讨论空间的自反性。

设X是线性赋范空间，X^*是它的共轭空间，由于X^*也是线性赋范空间，它也有共轭空间$(X^*)^*$，把它记为X^{**}，称X^{**}是X的第二次共轭空间。如此继续下去就有X的三次

共轭空间$X^{***}=(X^{**})^*$，如此等等。这些空间之间自然是有联系的。我们只考察X与X^{**}的关系。

对每个$x\in X$，作X^*上的泛函x^{**}如下：对$f\in X^*$，令

$$x^{**}(f)=f(x)$$

显然，这样作的x^{**}是X^*上的线性泛函，而且由于

$$|x^{**}(f)|\leqslant\|f\|\ \|x\|$$

所以x^{**}是有界泛函，并且$\|x^{**}\|\leqslant\|x\|$，称泛函x^{**}为由x生成的。又称$X\to X^{**}$的算子$x\to x^{**}$为嵌入算子。

定理2 设X是线性赋范空间，嵌入算子$x\mapsto x^{**}$（$x\in X$）是$X\to X^{**}$的保范的线性算子，即

（1）$(\alpha x+\beta y)^{**}=\alpha x^{**}+\beta y^{**}$

（2）$\|x^{**}\|=\|x\|$

〔证明〕（1）是明显的。欲证(2)，只要证$\|x^{**}\|\geqslant\|x\|$就可以了。对任何$x\neq 0$，由泛函延拓定理知道必有$f_x\in X^*$，$\|f_x\|=1$，而且$f_x(x)=\|y\|$。因此

$\|x^{**}\|\geqslant|y^{**}(f_x)|=|f_x(x)|=\|x\|$。〔证毕〕

记$\widehat{X}$表示X经过映射$x\mapsto x^{**}$后的象，$\widehat{X}\supset X^{**}$。

定理2说明X与$\widehat{X}$是线性等距同构。今后为简单起见，往往是不去区别x^{**}与x，即把$\widehat{X}$和X一致起来。从而$X\subset X^{**}$

定义1 设X是线性赋范空间。如果$X=X^{**}$，就称X是自反的。

当X是自反空间时，X^*也是自反的。事实上，这时$(X^*)^{**}=(X^{**})^*=X^*$。

例如当$1<p<+\infty$而且q是p的对偶数即$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

时，那末（$L^p[a,b]$）*= $L^q[a,b]$，（$L^q[a,b]$）*= $L^p[a,b]$ 就是说$L^p[a,b]$ 是自反的。对 $l^p(1<p<+\infty)$来论也有（l^p）$^*=l^q$，$(l^q)^*=l^p$，故l^p是自反的。

对$L^2[a,b]$，l^2、R^n来说，它们的共轭空间就是它们自己，即满关系$(L^2[a,b])^*=L^2[a,b]$，$(l^2)^*=l^2$ $(R^n)^*=R^n$，我们称它们是自共轭空间。

但一般说来，一个线性赋范空间X，即便是完备的，不一定是自反的。例如l^1就是一例。为了说明这个事实，我们先证明

定理3 设X是巴拿赫空间，如果X^*是可分的，那末X也必可分。

〔证明〕 由于假设X^*是可分的，所以在X^*中有一列$\{f_n\}$，它在X^*的单位球面上稠密。对每个f_n，由于

$\sup\limits_{\|x\|=1}|f_n(x)|=\|f_n\|>\frac{1}{2}$。

令$X_0=\text{span}\{x_n\}$，则X_0是可分的，因为它有一个可列稠密集，也就是x_n的所有线性组合的全体，其系数的实部和虚部均为有理数。

我们来证$X=X_0$，如果X不可分，那末必然$X_0\neq X$，由§4.7泛函延拓定理推论2从而在X^*中存在f_0，$\|f_0\|=1$而且当$x\in X_0$时，$f_0(x)=0$，然而

$$\|f_n-f_0\|\geqslant|f_n(x_n)-f_0(x_n)|=|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}$$

这与$\{f_n\}$在X^*的单位球面上稠密的假设矛盾。所以X是可分的。 〔证毕〕

利用这个定理立即可知：l^1不是自反的。事实上，如果l^1是自反的，即$(l^1)^{**}=l^1$，由于l^1可分，所以$(l^1)^*$也应该

是可分的。根据§3.4例4l^∞是不可分的。本章§4.6例4$(l^1)^* = l^\infty$。这与假设l^1是自反的冲突，故l^1不是自反的。

§4·9 逆算子·逆算子定理

在微分方程和积分方程以及代数方程的理论中，研究解的存在唯一性是一个重要课题。现在我们从算子的角度来考虑方程解的存在性、唯一性问题。

定义 设X、Y都是巴拿赫空间，算子T是X到Y上的算子，如果对每个$y\in Y$，方程

$$Tx = y \tag{4.31}$$

有唯一的解，则称算子T是可逆的。

这时，对每一个$y\in Y$，有方程的唯一解与它对应，实现这个对应的算子称为T的逆算子，用T^{-1}表示。

定理1 线性算子T的逆算子T^{-1}仍是线性的。

〔证明〕 为了证明T^{-1}的线性，只要证明等式

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2$$

成立即可，令$y_1 = Tx_1$，$y_2 = Tx_2$，由T的线性

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha y_1+\beta y_2 \tag{4.32}$$

由逆算子定义，可知

$$T^{-1}y_1 = x_1,\quad T^{-1}y_2 = x_2$$

分别以α、β乘这两个等式，并把它们加起来即得：

$$\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2=\alpha x_1+\beta x_2$$

另一方面，由(2)及逆算子定义，可以推出

$$\alpha x_1+\beta x_2 = T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)$$

把这等式同前一等式比较可知

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2$$

下面我们给出逆算子定理，它是泛函分析最基本的定理之一，它反映了线性有界算子极为深刻的特征。

定理2 设X和Y都是巴拿赫空间，如果T是X到Y上的一对一线性有界算子，则T的逆算子T^{-1}也是线性有界算子。

显然T^{-1}存在，并且是线性的，证明该定理主要是要证明T^{-1}有界，证明这一点的关键在于（其实是等价于）证明X中的闭单位球$\overline{S_x}(0,1)$的象$T\overline{S_x}(0,1)$能包含着Y中某个闭球（当然开球也可以）$Q_y(0,\varepsilon)$，如能做到

$$T\overline{S_x}(0,1)\supset Q_y(0,\varepsilon)$$

取$\varepsilon=\frac{\delta}{2}$，便有$T^{-1}Q_y(0,\frac{\delta}{2})\subset\overline{S_x}(0,1)$

即 $y\in Q_y(0,\frac{\delta}{2})$，$\|T^{-1}y\|\leqslant 1$

从而 $\|T^{-1}\|\leqslant\frac{2}{\delta}$

为了证明这一点，我们由下面两个引理给出。

引理1 设X、Y是两个巴拿赫空间，T是X到Y上一一对应的有界线性算子，那么对于任何$\alpha>0$，必有$\delta>0$使得$T\overline{S_x}(0,\alpha)$在$Q_y(0,\alpha\delta)$中稠密。

〔证明〕 分两步完成，第一步，必有正整数n，使得$T\overline{S_x}(0,n)$在$Q_Y(y_0,r_0)$中稠密，

令 $\overline{S_x}(0,n)=\{x\,|\,\|x\|\leqslant n,x\in X\}$，

$n=1,2,\cdots$

M_n为$\overline{S_x}(0,n)$在T作用下的象，即$M_n=T\overline{S_x}(0,n)$

所以有 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{S_x(0,n)}$

$$Y=TX=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$$

现在要证明$\{M_n\}$至少有一个集合在Y中某个闭球$Q_y(y_0,r_0)$中稠密。用反证法，假如结论不成立，则在任何闭球Q_y的内部，对每个M_n总存在某个闭球，它不含M_n中的元素，任取闭球Q_0，在Q_0中存在一个Q_1，它不含M_1的元素，在Q_1中又存在一个闭球Q_2，它又不含M_2的元素，将这一步骤继续下去，可以得到一个渐缩的闭球套：$Q_n\supset Q_{n+1}$（$n=1,2,\cdots$），$n\to\infty$时，Q_n的半径趋于0，由Y的完备性，存在Y中的一个元素y_0属于所有的闭球Q_n，再由Q_n的取法知y_0不属于任何M_n，这与$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$矛盾，因此必有某个$M_n=T\overline{S_x}(0,n_0)$在$Y$中的某个闭球$Q_y(y_0,r_0)=\{y\mid\|y-y_0\|\leqslant r_0,\ y\in Y\}$中稠密。

第二步：取$\delta_0=\frac{r}{n_0}$，今证$T\overline{S_x}(0,a)$在$Q_y(0,a\delta)$中稠密。不妨设$a=1$，这只要经过平移就行了。事实上，任取$y\in Q_y(0,\delta_0)$那么向量

$$y_0-n_0y,\quad y_0+n_0y$$

属于闭球$Q_y(y_0,r_0)$，因此必有$\overline{S_x}(0,n_0)$中的点列$\{x_k\}$，$\{x'_k\}$使得

$$Tx_k\to y_0-n_0y$$

$$\mathrm{T}x'_k \to y_0 + n_0 y$$

$$\mathrm{T}(x'_k - x_k) \to 2n_0 y$$

$$\mathrm{T}\left(\frac{x'_k - x_k}{2n_0}\right) \to y$$

显然$\dfrac{x'_k - x_k}{2n_0} \in \overline{S}_x(0, 1)$，所以$\mathrm{T}\overline{S}_x(0,1)$在$Q_y(0, \delta_0)$中稠密。

引理 2　设X、Y是两个巴拿赫空间，T是X到Y上的一一对应的线性有界算子，那么，必存在$\varepsilon>0$，使得

$$\mathrm{T}\overline{S}_k(0,1) \supset Q_y(0,\varepsilon)$$

证明　取$\varepsilon = \dfrac{\delta_0}{2}$，这个$\delta_0$就是引理1中所说的$\delta_0$。

任取$y_0 \in Q_y\left(0, \dfrac{\delta_0}{2}\right)$，因为$\mathrm{T}\overline{S}x\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$在$Q_y\left(0, \dfrac{\delta_0}{2}\right)$中稠密，必有$x_1 \in \overline{S}_x\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，使得

$$\| y_0 - \mathrm{T}x_1 \| \leqslant \frac{\delta_0}{2^2}$$

因此　$y_1 = y_0 - \mathrm{T}x_1 \in Q_y\left(0, \dfrac{\delta_0}{2^2}\right)$

由于　$\mathrm{T}\overline{S}_x\left(0, \dfrac{1}{2^2}\right)$在$Q_y\left(0, \dfrac{\delta_0}{2^2}\right)$中稠密，必有

$x_2 \in S_x\left(0, \dfrac{1}{2^2}\right)$，使得

$$\| y_1 - \mathrm{T}x_2 \| \leqslant \frac{\delta_0}{2^3}$$

即　$y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in Q_y(0, \frac{\delta_0}{2^3})$，这样继续下去，得到一列 $\{x_n\}$，$x_n \in \overline{S}_x(0, \frac{1}{2^n})$

使得

$$\| y_0 - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \| \leqslant \frac{\delta_0}{2^{n+1}}$$

因此　$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$，而且

$$\| x_0 \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

因此由T的连续性得

$$y_0 = \lim_{n \to \infty} T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = Tx_0$$

即　$T\overline{S}(0,1) \supset Q_y(0, \frac{\delta_0}{2})$　〔证毕〕

现在我们回到定理的证明。任取 $y \in Y$，$y \neq 0$，

$$\frac{\delta y}{2\|y\|} \in Q_y(0, \frac{\delta}{2})$$

故　$$T^{-1}\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right) \in \overline{S}_x(0,1)$$

于是　$$\left\| T^{-1} \frac{\delta y}{2\|y\|} \right\| \leqslant 1$$

即　$$\| T^{-1} y \| \leqslant \frac{2}{\delta} \| y \|$$

于是T是有界的。〔证毕〕

作为逆算子定理的一个运用，我们将范数等价的命题写成定理的推论。

推论 设线性空间X上的两个范数$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$均使X成为拿巴赫空间且不等式

$$\|x\|_2 \leqslant K\|x\|_1 \tag{4.33}$$

对一切$x\in X$成立，其中K为一固定的正数，则$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$等价。

〔证明〕 将X按范数$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$所成的巴拿赫空间记为X_1、X_2，令I是将X_1中的元素x映成X_2中同一元素的恒等映射，则I是由X_1到X_2上的一一对应的线性算子，由(4.33)，I有界，根据定理，I^{-1}是有界的，即存在$K'>0$，使

$$\|I^{-1}x\|_1 \leqslant K'\|x\|_2$$

即 $\|x\|_1 \leqslant K'\|x\|_2$，故$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$等价。

§4·10 闭图象定理

通常的一元函数$y=f(x)$的图象是平面上的一条曲线，过这条曲线由平面上的点$(x,f(x))$组成。对一般的线性算子也可以引入图象的概念。

定义1 设X和Y是两个线性赋范空间，T是X的子空间$D(T)$到Y中的线性算子，称$X\times Y$中的集合

$$G(T)=\{(x,y)\,|\,x\in D(T),\ y=Tx\}$$

为算子T的图象。在$X\times Y$中定义范数$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$，易知$X\times Y$按$\|(x,y)\|$成为线性赋范空间，如果$G(T)$是$X\times Y$中的闭集，则称T是闭算子。

下面的定理给出闭算子的一个等价条件，利用这个等价

条件检验线性算子是否为闭算子往往比较简便。

定理1 设X,Y都是线性赋范空间，T是$D(T)\subset X$到Y中的线性算子，则T为闭算子的充要条件是对任意的$\{x_n\}\subset D(T)$ ($n=1,2,\cdots$)，若$x_n\to x$；$Tx_n\to y$，这里$x\in X$，$y\in Y$，则$x\in D(T)$且$Tx=y$ 。

〔证明〕 充分性：任取$(x,y)\in \overline{G(T)}$，则存在$\{x_n\}\subset D(T)$ ($n=1,2,3,\cdots$)使

$$(x_n, Tx_n)\to(x,y)$$

于是$x_n\to x$；$Tx_n\to y$ ($n\to\infty$)。由假设，$x\in D(T)$且$Tx=y$，故 $(x,y)=(x,Tx)\in G(T)$，即$G(T)$是$X\times Y$中的闭集，就是说T为闭算子。

必要性：设$\{x_n\}\subset D(T)$($n=1,2,\cdots$)且$x_n\to x$，$Tx_n\to y$ ($n\to\infty$)，这里$x\in X$,$y\in Y$，容易看出

$$(x_n, Tx_n)\to(x,y)$$

因T为闭算子，即$G(T)$为闭集，故$(x, y)\in G(T)$，这表明$x\in D(T)$，且$Tx=y$。 〔证毕〕

对于一个给定的线性算子，现在已经有三个比较重要的概念，即连续性、有界性及闭性。因连续性与有界性等价，故本质上只有两个不同的概念，即有界性与闭性。现在要问：有界性与闭性的关系如何？具体说，我们要问：有界线性算子何时是闭算子？闭算子何时是有界的？下面的定理2与定理3分别回答了这个问题。

定理2 设X、Y 都是线性赋范空间，T是$D(T)\subset X$到Y中的线性有界算子，如果$D(T)$在X中是闭的，则T是闭算子，特别当T的定义域$D(T)=X$时，T是闭算子。

〔证明〕 当$D(T)$在X中是闭的，注意到T有界，故满足定理1中的条件，由定理1的充分性可知T是闭算子。

定理3（闭图象定理）设X和Y是巴拿赫空间，T是$D(T)\subset X$到Y上闭算子，如果$D(T)$是闭的，则T是有界算子。

〔证明〕 容易证明两个巴拿赫空间X与Y的乘积空间$X\times Y$按范数

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$$

仍是巴拿赫空间。由假设$D(T)$是X中闭集，$G(T)$是$X\times Y$中闭集，故$G(T)$也是完备的度量空间，并且由于$D(T)$是线性子空间，T是线性算子，易知$G(T)$是$X\times Y$中的线性子空间，即$G(T)$也是巴拿赫空间。我们作算子P：$G(T)\to D(T)$

$$P(x,y)=x \qquad (x,y)\in G(T)$$

显然P是线性算子，且因

$$\|P(x,y)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|y\|=\|(x,y)\|$$

即P是有界算子，又若$(x,Tx)\neq(y,Ty)$，必有$x\neq y$故

$$P(x,Tx)\neq P(y,Ty)$$

因而P是一对一的，P显然是到$D(T)$上的映射，由逆算子定理，P^{-1}存在，即

$$\|P^{-1}x\|\leqslant\|P^{-1}\|\,\|x\|$$

而$\|Tx\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|=\|P^{-1}x\|$

所以 $$\|Tx\|\leqslant\|P^{-1}x\|$$

这说明T是有界算子。 〔证毕〕

定理3比较重要，原因在于它将判别算子是否有界转化为判别算子是否为闭算子这在不少情况下是比较容易的。

不过应当注意，如果闭算子的定义域仅是巴拿赫空间的某个真子空间，则它不一定是有界的。

例 1 考察微分算子 $T=\frac{d}{dt}$。它是定义在 $C[a,b]$ 内具有连续导数的函数类 $C^1[a,b]$ 上而值域包含在 $C[a,b]$ 内的线性算子，前面已经指出过T是无界的，现在利用定理1证明T是闭算子。

设 $\{x_n(t)\}\subset C^1[a,b]$ $(n=1,2,3,\cdots)$，且 $x_n(t)\to x(t)$；$Tx_n\to y(n\to\infty)$。第二个极限实际上是指 $x_n'(t)\to y$ $(n\to\infty)$，由数学分析可知，$x(t)$ 具有连续导数 $x'(t)$ 且 $x'(t)=y(t)$。这表明 $x(t)\in C^1[a,b]$，且 $Tx=y$，由定理1可知T是闭算子。

§4·11 一致有界定理

这一节将给出巴拿赫和斯坦因豪斯(Steinhaus)1927年给出的一致有界性原理——也称共鸣定理。它是巴拿赫空间理论的基石之一，许许多多古典的分析问题，经过抽象以后都可以归结为这一原理，因而充分显示了泛函分析的重要作用。

在介绍本定理之前先回顾一下富里叶级数中的一个问题。

设 $f(t)$ 的富里叶级数为

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

迪里(Dini)定理指出，当（1）$f(t)\in C[0,2\pi]$；（2）$f(t)$ 处处可导时，有

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

我们问，只有条件（1）结论是否成立？为回答这个问题，前人们曾付出过艰苦的劳动，后来人们用泛函的方法比较容易地回答这个问题，这是产生共鸣定理的背景之一。

定理1（共鸣定理-巴拿赫-斯坦因豪斯定理） 设X是巴拿赫空间，Y是线性赋范空间，$\{T_\tau, \tau\in A\}$是X到Y的一族线性有界算子，如果对每个$x\in X$

$$\sup_{\tau} \|T_\tau x\| < \infty \qquad (4.34)$$

那末数集$\{\|T_\tau\|, \tau\in A\}$是有界的。

〔证明〕 任取一个指标集$\alpha\bar{\in} A$，令$A_1 = A\cup\{\alpha\}$，规定$T_\alpha = I$。在巴拿赫空间X上再规定一个范数：

$$\|x\|_1 = \sup_{\tau\in A} \|T_\tau x\|$$

$$= \max(\|x\|, \sup_{\tau\in A} \|T_\tau x\|) \quad x\in X$$

由于$\|T_\alpha x\| = \|x\|$，所以$\|x\|_1 \geqslant \|x\|$，又由(4.34)，$\|x\|_1<\infty$，$\|\cdot\|_1$ 显然满足对范数的正齐性以及$\|x\|=0$推出$x=0$的要求。今证三点不等式也满足；事实上，由于

$$\|T_\tau(x+y)\| \leqslant \|T_\tau x\| + \|T_\tau y\|$$

$$\leqslant \sup_{\tau\in A_1} \|T_\tau x\| + \sup_{\tau\in A_1} \|T_\tau y\|$$

因此

$$\|x+y\|_1 \leqslant \sup_{\tau\in A_1} \|T_\tau(x+y)\| \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$$

现在证明X按$\|\cdot\|_1$成为巴拿赫空间，事实上，如果$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$为基本点列，由于$\|\cdot\|\leqslant\|\cdot\|_1$，所以$\{x_n\}$按$\|\cdot\|$也是基本点列，因此有$\|x_n - x_0\|\to 0(n\to\infty)$。

今证$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$收敛于x_0。对任何$\varepsilon>0$，必存在N，当n，$m\geqslant N$时

$$\|x_n-x_m\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$$

即当　$\tau\in A_1$时，$\|T_\tau(x_n-x_m)\|<\frac{\varepsilon}{2}$　。令 $m\to\infty$ 就得

$$\|T_\tau(x_n-x_0)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

所以当$n\geqslant N$时

$$\|x_n-x_0\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

即$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$收敛于x_0。

根据§4·9定理2的推论，必存在$C>0$，使得$\|x\|_1\leqslant C\|x\|$对一切$x\in X$成立，也就是说$\{\|T_\tau\|\,|\tau\in A\}$是有界数集，上界不超过$C$。〔证毕〕

作为一致有界性原理的特例，有下述的定理

定理2　设$\{f_n\}$是巴拿赫空间上的一列泛函，如果$\{f_n(x)\}$在X上的每一点x处有界，那末$\{f_n\}$一致有界。

推论　设$\{T_n\}$是巴拿赫空间X到线性赋范空间Y的强收敛有界算子列，则$\{\|T_n\|\}$有界。

〔证明〕因为对任一固定的$x\in X$，$\{T_nx\}$收敛，故$\{\|T_nx\|\}$有界，由共鸣定理知$\{\|T_n\|\}$有界。

现在来回答我们开始指出的问题。

例　设$C[0,2\pi]$为定义在R上以2π为周期的实值

连续函数构成巴拿赫空间，其中$\|x\| = \max\limits_{t\in R}\|x(t)\|$， 又对$x(t)\in C[0,2\pi]$，设

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\,dt \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\,dt \qquad (k=1,2,\cdots)$$

即 $$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

求证 $x(t)\in C[0,2\pi]$，使当$t=0$时

$$x(0)\neq\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

即 $$x(0)\neq\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

〔证明〕 作$C[0, 2\pi]$上的连续线性泛函列：

$$f_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}$$

$(n=,1,2,\cdots)$

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}\right|dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)S}{\sin S}\right|dS$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n+1)S|}{S}dS$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}du \to \infty \quad (n\to\infty)$$

若对于任何 $x(t)\in C[0,2\pi]$，有$x(0)=a_0/2$

$+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$，即

$$f_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\to x(0)$$

从而 $\{|f_n(x)|\}$有界，根据共鸣定理$\{\|f_n\|\}$应有界，这与$\|f_n\|\to\infty$ 矛盾。所以定有$x(t)\in C[0,2\pi]$,使

$$x(0)\neq\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

§4·12 线性赋范空间中的几种收敛概念

到目前为止，我们已经定义了下列几种收敛概念：

对于线性赋范空间中的点列来说，有强收敛（前面我们只提收敛）概念。对于定义在线性赋范空间上的有界线性算子序列来说，则定义了依范数收敛——即一致收敛与强收敛，我们已经指出了这是两种不同的收敛概念。本节里再定义两种收敛概念：一种是有界线性泛函序列的弱*收敛，另一种是点列的弱收敛。为了使几种收敛概念不至混淆，我们对前面已经定义过的概念，也在这次归纳一起同时给出，这样对不同的收敛概念也有个比较。

定义 1 设X是线性赋范空间，$x_n \in X$，$n=1,2,\cdots$。

（1）如果存在$x \in X$，使得$\|x_n - x\| \to 0$，则称点列$\{x_n\}$强收敛于x。

（2）如果对任意的$f \in X^*$，都有$f(x_n) \to f(x)$，则称点列$\{x_n\}$弱收敛于x。

显然，强收敛必是弱收敛，但弱收敛不一定强收敛。

例1 设 $X = l^2$

$e_n = (0,\cdots 0,0,1,\cdots)$ $n=1,2,\cdots$则，$\|e_n\| = 1$，故$\{e_n\}$不强收敛于0，但对任何

$$y \in (l^2)^* = l^2, y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2 < \infty$$

令 $f \in (l^2)^*$，$f(e_n) = \eta_n \to 0$，故$\{e_n\}$弱收敛于0。

定义 2 设X是线性赋范空间，X^*是X的共轭空间，泛函序列$f_n \in X^*$（$n=1,2,\cdots$），如果存在$f \in X^*$，使得

（1） $\|f_n - f\| \to 0$，则称$\{f_n\}$强收敛于f。

（2） 对任意$x \in X$，都有$|f_n(x) - f(x)| \to 0$，则称f_n

弱*收敛于f。

(3) 对任意的$F\in(x^*)^*$都有$F(f_n)\to F(f)$，则称$\{f_n\}$弱收敛于f。

一般说来，弱*收敛与弱收敛并不一致，但如果X和x^{**}之间能够建立起等距同构，即X是自反空间时，这两种收敛就是等价的了。

定义3 设X和Y是两个线性赋范空间，$B(X\to Y)$表示X到Y中线性有界算子全体所成的空间，$T_n\in B(X\to Y)$，$n=1,2,\cdots$若存在$T\in B(X\to Y)$，使得

(1) $\|T_n-T\|\to 0$，则称算子序列$\{T_n\}$一致收敛于T。

(2) 对任意的$x\in X$，$\|T_nx-Tx\|\to 0$，则称$\{T_n\}$强收敛于T。

(3) 对任意$x\in X$和任意的$f\in X^*$，$f(T_nx)\to f(Tx)$，则称$\{T_n\}$弱收敛于T。

由算子列的一致收敛可导出强收敛（§4·5定理2），强收敛可导出弱收敛，反之不然。

例2 令$X=Y=l^2$

$$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)\in l^2$$

$$T_nx=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n个},\xi_1,\xi_2,\cdots)\quad n=1,2,\cdots$$

这是平移算子，T_n显然是线性算子，并且$\|T_nx\|=\|x\|$。

设 $e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)\quad n=1,2,\cdots$

$$T_nx=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_ke_k\qquad n=1,2,\cdots$$

对任意的$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，设$f\in(l^2)^*$，$f(e_n)=\eta_n$，于是

$$f(T_nx)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$$

由荷尔德不等式有

$$|f(T_nx)|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|x\|\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0$$

即$\{T_n\}$弱收敛于0，但$\{T_n\}$不强收敛，这只要取$x=e_1=(1,0,0,\cdots)$，则当$n\neq m$时，就有

$$\|T_ne_1-T_me_1\|=\|e_{n+1}-e_{m+1}\|=\sqrt{2}$$

故$\{T_ne_1\}$不收敛。

我们有下面的定理

定理1 设T_n，$n=1,2,\cdots$是由巴拿赫空间X到巴拿赫空间Y中的有界线性算子序列，则$\{T_n\}$强收敛的充要条件是

（1）$\{\|T_n\|\}$有界；

（2）对X中一稠密子集D中的x，$\{T_nx\}$收敛。

〔证明〕 必要性。若$\{T_n\}$强收敛，条件（2）成立是显然的。现证成立（1）。由$\{T_n\}$强收敛，所以对任何$x\in X$，$\{T_nx\}$收敛，故$\{\|T_nx\|\}$有界，由共鸣定理知$\{\|T_n\|\}$有界。

充分性。设$\|T_n\|\leqslant M$，$n=1,2\cdots$，对任何$x\in X$及$\varepsilon>0$，由于D在X中稠密，必存在$z\in D$，使$\|x-$

$z\| < \frac{\varepsilon}{3M}$，又因$\{T_n z\}$收敛，故存在$N$，当$n>N$时，对任意的$p>0$，有

$$\|T_{n+p}z - T_n z\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_{n+p}x - T_n x\| &\leqslant \|T_{n+p}x - T_{n+p}z\| + \|T_{n+p}z - T_n z\| + \|T_n z - T_n x\| \\ &\leqslant \|T_{n+p}\|\,\|x-z\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n\|\,\|x-z\| \\ &\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon\end{aligned}$$

即$\{T_n x\}$是Y中哥西点列，由Y的完备性，知$\{T_n x\}$收敛。〔证毕〕

将定理1用于泛函的情形有如下定理。

定理 2 巴拿赫空间X上任何一列泛函$\{f_n\}$，如果弱*收敛，必定有界，反之，有界泛函列$\{f_n\}$若在X的一个稠密子集上收敛，则必弱*收敛。

§4·13 凸集

在本章的最后一节，我们介绍一般线性空间中凸集的概念。凸集理论与许多数学分支有着密切的联系，它是泛函分析中常用的一个重要概念。

一般线性空间中凸集的概念，是从平面凸集A的特征性质中抽象出来的，对于A中的任意两点x与y，联结这两点的线段

$$\lambda x + (1-\lambda)y \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$$

也必属于A，如图(4-1)。在这个性质中，只要求对（平面上）向量作线性运算，所以这个概念可以扩充到一般的线性空间。

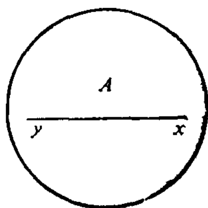


图 4-1

定义 1 设X是一线性空间，M是X的一个子集，如果对M中任何两点x，y联结它们的线段

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$$

都在M中，则称M为凸集。

例1 设X是线性空间，则X中的空集，一点组成的集合以及X的任意线性子空间都是凸集。

例2 线性赋范空间中的单位球

$$B_1(\theta)=\{x \mid x\in X,\ \|x\|\leqslant 1\}$$

是一个凸集。

事实上，当x，$y\in B_1(\theta)$时，$\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$，于是

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant|\lambda|\,\|x\|+|1-\lambda|\,\|y\|\leqslant 1$$

故$B_1(\theta)$是一个凸集。

例3 设X是平面向量$x=(\xi_1,\ \xi_2)$的全体，在X中引入下列范数

$$\|x\|_2=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2},\quad \|x\|_\infty=\max(\xi_1,\xi_2)$$

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|,\quad \|x\|_p=(|\xi_1|^p+|\xi_2|^p)^{\frac{1}{p}}\quad (p>1)$$

我们来看，对于每一个范数来说，单位球到底是什么？

很明显，如图4-2所示在$\|x\|_2$的情形，单位球是半径为1的圆，在$\|x\|_\infty$的情形，单位球是$(\pm1,\pm1)$为顶点的正方形，我们再看与范数$\|x\|_p$对应的单位球，并让p从1增加到∞，这时这“球”将从$\|x\|_1$对应的正方形连续地变形，终于成为与$\|x\|_\infty$对应的正方形。

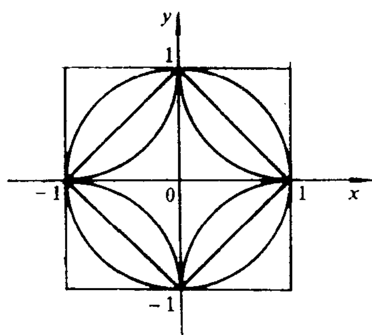


图 4-2

如果我们设

$$\|x\|_p=(|\xi_1|^p+|\xi_2|^p)^{\frac{1}{p}}\quad (p\leqslant1)$$

那末$\|x\|_p\leqslant1$ 就不再是凸的了。（例如，当$p=2/3$时，也

就是星形)。这一现象乃是以下事实的另一种表现：当$p<1$时，该范数不能满足范数公理(3)。

下面我们来建立线性赋范空间X中的凸集最简单性质。

定理1 任意多个凸集的交集仍为凸集。

〔证明〕 设$M=\bigcap_{\alpha} M_\alpha$，其中每个$M_\alpha$都是凸集。$x$，$y$是$M$中任意两点，这两点属于一切$M_\alpha$，于是联结$x$，$y$两点的线段必含在每一个$M_\alpha$内，因而也就含在$M$内，由此可见$M$确是凸集。

由于闭集的交集总是闭的，所以有下述定理。

定理2 任意多个闭凸集的交集仍为闭凸集。

定理3 凸集的闭包仍为凸集。

〔证明〕 设M是凸集，$\overline{M}$是它的闭包，x，y是$\overline{M}$中任意两点，并设$\varepsilon>0$是任意正数，在M中取a，b使

$$d(a,\ x)<\varepsilon,\qquad d(b,\ y)<\varepsilon$$

于是，对于满足$0\leqslant\lambda\leqslant1$的任何$\lambda$，总有

$$d(\lambda x+(1-\lambda)y,\ \lambda a+(1-\lambda)b)<\varepsilon$$

因为M是凸的，所以$\lambda a+(1-\lambda)b\in M$，由于$\varepsilon$是任意的，所以$\lambda x+(1-\lambda)y\in\overline{M}$，因而$\overline{M}$是凸的。

定义2 设M是线性赋范空间X中的任一集合，我们把包含M的最小闭凸集称为M的凸闭包。

习　　题

1．证明具有通常的加法和乘法的全体实数集作成一个一维向量空间，全体复数集作成一个一维复向量空间。

2. 描述在 R^3 中 $M=\{(1,1,1),(0,0,2)\}$ 中的线性包。

3. 在下列R^3的子集中，哪些作成R^3的子空间？这里 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$。

(a)具有$\xi_1=\xi_2$，且$\xi_3=0$的所有x；

(b)$\xi_1=\xi_2+1$的所有x；

(c)具有正的ξ_1，ξ_2，ξ_3的所有x；

(d)具有$\xi_1-\xi_2+\xi_3=k$,k为常数的所有x；

4. 证明在一n维向量空间X中，任何x作为给定基向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$的线性组合的表示法是唯一的。

5. 若Y和Z都是向量空间X的子空间，试证$Y\cap Z$是X的子空间，而$Y\cup Z$则不一定是。

6. 若$M\neq\phi$是向量空间X的任一子集，求证span M是X的子空间。

7. 求证所有实的二阶方阵之集作成一向量空间X，X中的零向量是什么？确定$\dim X$，求出X的一个基。

8. 验证平面上或三维空间中的向量的普通长度具有范数的性质。

9. 证明不等式

$$\big|\,\|y\|-\|x\|\,\big|\leqslant\|y-x\|$$

10. 证明在R^n和C^n中

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义一个范数。

11. 设X是所有有序实数对$x=(\xi_1,\xi_2)$,$y=(\eta_1,\eta_2)$作成的向量空间，证明

$$\| x \|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$$

$$\| x \|_2 = (\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| x \|_\infty = \max \{ |\xi_1|, |\xi_2| \}$$

都定义X上的范数。

12. 证明在空间l^p中

$$\| x \| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

定义一个范数。

13. 证明　由有序的n—数组作成的向量空间上，由

$$\| x \|_1 = |\xi_1| + |\zeta_2| + \cdots + |\xi_n|$$

$$\| x \|_p = (|\xi_1|^p + |\zeta_2|^p + \cdots + |\zeta_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\| x \|_\infty = \max \{ |\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_n| \}$$

定义为范数。

14. 证明向量空间$X \neq \{0\}$上的离散度量不可能从范数得到。

15. 若d是向量空间$X \neq \{0\}$上的从范数得到距离，并且$\tilde{d}$由

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ d(x, y) + 1 & x \neq y \end{cases}$$

定义，试证$\tilde{d}$不可能由范数导出。

19. 证明赋范空间的子集M为有界当且仅当有正数C存在，使得对每个$x \in M$都有$\| x \| \leqslant C$。

17. 证明$C \subset l^\infty$是l^∞的向量子空间，并且由所有收敛于零的标量序列组成的空间C_0也是l_∞的向量子空间。

18. 证明C_0是l^∞中的一个闭子空间，从而证明C_0是完备的。

19. 在l^∞中，设Y是由所有的仅有有限多非零项的序列成的子集，求证Y是l^∞的子空间，但不是闭子空间。

20. 证明在赋范空间X中，向量的加法与标量的乘法是关于范数的连续运算。

21. 证明在巴拿赫空间中，绝对收敛级数是收敛的。

22. 若$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_1$是X上的等价范数，求证在$(X,\|\cdot\|)$中和$(X,\|\cdot\|_1)$中的哥西序列是相同的。

23. 设$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$\|x\|$是该向量空间$X$上任一范数证明存在$b>0$，使得对所有$x$有$\|x\|\leqslant b\|x\|_2$。

24. 证明习题13中的范数$\|x\|_1$和$\|x\|_2$满足

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\|x\|_1$$

25. 证明分别由

$$(\xi_1,\xi_2)\quad\rightarrow\quad(\xi_1,0)$$
$$(\xi_1,\xi_2)\quad\rightarrow\quad(0,\xi_2)$$
$$(\xi_1,\xi_2)\quad\rightarrow\quad(\xi_2,\xi_1)$$
$$(\xi_1,\xi_2)\quad\rightarrow\quad(r\xi_1,r\xi_2)$$

定义的，从R^2到R^2别的算子T_1，T_2，T_3，T_4是线性的，并从几何上解释这些算子。

26. 用2×2矩阵写出上题中的算子。

27. 设T：$D(T)\rightarrow Y$是线性算子，且设它的逆存在，若$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是$D(T)$中的线性无关组，求证组

$\{Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n\}$是线性无关的。

28．设T：$X \to Y$是线性算子，且$\dim X = \dim Y = n < \infty$，求证$R(T) = Y$当且仅当$T^{-1}$存在。

29．证明

(1) $\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\| \|T_2\|$

(2) $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$

30．设T是赋范空间X到赋范空间Y上的有界线性算子，若存在正数b，使

$$\|Tx\| \geqslant b\|x\|$$

对一切$x \in X$ 试证T^{-1}存在且有界。

31．设T：$C[0,1] \to C[0,1]$系由

$$y(t) = \int_0^t x(t)\mathrm{d}t$$

所定义，求$R(T)$及T^{-1}，问T^{-1}是不是线性且有界？

32．空间l^2，选取一固定的$\alpha = (\alpha_j) \in l^2$，并且令

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j$$

其中 $x = (\xi_j) \in l^2$，证明$f(x)$是线性有界泛函。

33．证明在$C[a,b]$上由

$$f_1(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \qquad y_0 \in C[a,b]$$

$$f_2(x) = \alpha x(a) + \beta x(b) \qquad \alpha, \beta \text{ 固定}$$

定义的泛函是线性有界的。

34．证明定义在同一向量空间上具有同一零空间的两个线性泛函$f_1 \neq 0$和$f_2 \neq 0$是成比例的。

35．确定算子T的零空间，而T：$R^3 \to R^2$是由

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所表示的。

36．设T：$R^3 \to R^3$由$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (\xi_1, \xi_2, -\xi_1-\xi_2)$所定义，求$R(T)$，$N(T)$并表示T的一个矩阵。

37．若f在R^3上是由$f(x)=\xi_1+\xi_2-\xi_3$定义的，其中$x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，求泛函f的零空间的基。

38．若x和y是有限维向量空间X中的不同向量，求证在X上存在线性泛函f使得$f(x) \neq f(y)$。

39．若X是有序n实数组成的空间，且

$$\|x\| = \max_j |\xi_j|$$

这里　$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，那么共轭空间$X^*$上的对应范数是什么？

40．证明空间C_0的共轭空间是l^1。

41．设$\{x_n\}$弱收敛，证明$\{\|x_n\|\}$有界。

42．设$\{\alpha_n\}$是一实数列，若对任何$\{x_n\} \in l^2$，都有$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$收敛，则$\{a_n\} \in l^2$。

第五章　内积空间和希尔伯特（Hilbert）空间

在前一章中，我们介绍了线性赋范空间的概念。以有限维空间来说，向量的范数相当于向量的模长。但是，在有限维欧几里得空间中还有一个很重要的概念——两个向量的夹角，特别是两个向量的正交。有了它们，就有勾股定理，向量的投影等等。在这一章中，我们将专门讨论一类特殊的线性赋范空间——内积空间，在这类空间中可以引入正交的概念以及投影的概念，从而在内积空间中建立起相应的几何学。在这一章中，我们还要讨论希尔伯特空间上的富里叶分析及它上面的算子

§5·1　内积空间和希尔伯特空间的基本概念

内积空间和希尔伯特空间的理论是泛函分析最早成熟的理论最丰富，应用最广的部分。它是欧氏空间概念的直接推广。我们熟悉在复欧氏空间中，向量除了有长度概念外，还定义了两个向量的内积运算，即若

$$a=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),b=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

则a与b的内积定义为

$$\langle a,b\rangle=\xi_1\overline{\eta}_1+\xi_2\overline{\eta}_2+\cdots+\xi_n\overline{\eta}_n \quad (5\cdot1)$$

其中$\overline{\eta}_i$表示η_i的复共轭，并且内积与向量a的长度有以下关系

$$\|a\|=\sqrt{\langle a, a\rangle}$$

由内积定义，可知两个向量a与b正交等价于 $\langle a,b\rangle=0$，显然，在有限维欧氏空间C^n中由(5.1)定义的内积具有下述性质：

(1) $\langle a,a\rangle\geq 0$，且 $\langle a,a\rangle=0$，等价于$a=0$；

(2) $\langle \alpha a+\beta b,c\rangle=\alpha\langle a,c\rangle+\beta\langle b,c\rangle$，其中$a,b,c\in C^n$，$\alpha,\beta$为复数；

(3) $\langle a,b\rangle=\overline{\langle b,a\rangle}$，$a,b\in C^n$

在复欧氏空间C^n的欧几里得几何学中所用到内积性质主要是上面三条，因此，利用这三条性质，我们也在一般的线性空间中引入内积的概念。

定义1 设X是复线性空间，如果对X中任何两个向量x,y有一复数 $\langle x,y\rangle$ 与之对应，并满足下列条件：

(1) $\langle x,x\rangle>0$，且 $\langle x,x\rangle=0$等价于$x=0,x\in X$；

(2) $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$，$z\in X,\alpha,\beta$复数；

(3) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$，$x,y\in X$。

则称 $\langle x,y\rangle$ 为x与y的内积，X称为内积空间。

如果X是实的线性空间，则条件(3)就改为

$$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$$

从内积的定义，立即可以得到下面的等式

$$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\bar{\beta}\langle x,z\rangle \tag{5.2}$$

特别

$$\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$$

$$\langle x,\alpha y\rangle=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$

可以证明(定理1)，由内积可以诱导出一个范数，这只须令

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

即可。我们先证明下面的引理。

引理1 （哥西-许瓦兹不等式） 设X按内积$\langle x,y\rangle$成内积空间，则对于X中任意向量x,y成立不等式

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\ \|y\| \qquad (5.3)$$

当且仅当x与y线性相关时，不等式(5.3)中等号才成立。

〔证明〕 如果$y=0$，易知对一切$x\in X$，$\langle x,0\rangle=0$，因而(5.3)式成立。若$y\neq 0$，则对每个复数α，由内积条件(1)，有

$$0\leqslant \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \langle x,x\rangle$$

$$-\overline{\alpha}\ \langle x,y\rangle - \alpha[\ \langle y,x\rangle - \overline{\alpha}\ \langle y,y\rangle\ ]$$

令$\overline{\alpha} = \langle y,x\rangle / \langle y,y\rangle$，那末上式方括号中式子为0，所以

$$0\leqslant \langle x,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\ \langle x,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y,\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

两边乘以$\|y\|^2$，并且开方，即可得到要证明的不等式

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\ \|y\|$$

若x与y线性相关，通过直接计算，易知(5.3)式中等号成立。反之，若(5.3)式中等号成立，假定$y=0$，则x与y自然线性相关，若$y\neq 0$，令

$$\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

由许瓦兹不等式推导过程，易知 $\|x-\alpha y\|^2=0$，即 $x=\alpha y$，所以 x 与 y 线性相关。〔证毕〕

内积空间中哥西-许瓦兹不等式在分析这个领域中是非常有用的工具，为了简便常称之为许瓦兹不等式。

定义了内积的线性空间必定具有线性赋范空间的一切性质（当然也是度量空间）。

定理1 每个内积空间 X 都是线性赋范空间。即对每个 $x\in X$，令

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{5.4}$$

则 $\|x\|$ 是 X 上的范数。

〔证明〕 只要验证(5.4)定义的 $\|x\|$ 满足范数公理：

（1） $\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0$ 等价于 $x=0$

事实上，$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\geqslant 0$，且 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=0$，等价于 $\langle x, x\rangle=0$ 即 $x=0$；

（2） $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\,\overline{\alpha}\,\langle x, x\rangle}$$

$$= |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\,\|x\|;$$

（3） $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

事实上

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2(\|x\|\,\|y\|) + \|y\|^2\end{aligned}$$

$$=(\|x\|+\|y\|)^2$$

即得三角不等式

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

称由(5·4)式定义的范数 $\|x\|$ 为由内积(诱)导出的范数。所以内积空间是一种特殊的赋范空间。若X按(5·4)式中范数完备，则称为希尔伯特空间我们有

定义2 设X是内积空间，由它导出的赋范空间如果按(5·4)式中的范数是完备的，则称X为希尔伯特空间。简言之，希尔伯特空间就是完备的内积空间。

引理2 内积 $\langle x,y\rangle$ 是两个变元的连续函数。

事实上，设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是X中的点列，分别强收敛于x，$y\in X$，即$x_n\to x$，$y_n\to y$，于是有

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|&\leqslant|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y_n\rangle|\\&\quad+|\langle x,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|\\&\leqslant\|x_n-x\|\,\|y_n\|+\|x\|\,\|y_n-y\|\end{aligned}$$

因y_n收敛，故$\|y_n\|$有界，所以，当$n\to\infty$时，上面不等式右端趋于0。

引理3 内积与范数之间成立如下不等式

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2)\tag{5·5}$$

(5·5)式称为极化恒等式，它表示内积可以用范数来表示，当X为实内积空间时，极化恒等式变为

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

我们知道，内积空间X总是赋范空间。反之对否？也即

每个赋范空间都是内积空间吗？也就是说范 数$\|x\|$都是由某个内积导出的吗？回答是否定。我们介绍内积空间的特征性质。

定理2 赋范空间X是内积空间的充分必要条件为对任意$x, y \in X$都有平行四边形公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \qquad (5.7)$$

成立。证明因限于篇幅而略去。

下面举一些内积空间的例子。

例1 R^n为n维欧氏空间，其范数

$$\|x\|=(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in R^n$$

设x，$y \in R^n$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$

内积 $$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$$

导出的范数$\|x\|$，显然R^n是希尔伯特空间。

同样，n维酉空间C^n，其中范数

$$\|x\|=(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in C^n$$

实际上是C^n中内积

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{\eta_i}, y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in C^n$$

导出范数，显然酉空间是希尔特伯空间。

有的作者，只把无限维的完备内积空间称之为希尔伯特空间，这主要因为有限维内积空间是线性代数中已研究清楚

了的，而泛函分析主要研究的是无限维空间的缘故。这种用语上的差别不是本质的。

例2 空间l^2，设$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$定义内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i}$$

其范数

$$\|x\|=(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

易验证$\langle x,y\rangle$是l^2上的内积，其中许瓦兹不等式就是$p=2$的荷尔德不等式：

$$|\langle x,y\rangle|=|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i}|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\overline{\eta_i}|$$

$$\leqslant(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

由此可知$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i}$是绝对收敛的，而$\|x\|$是由上面内积导出的范数，因此，$l^2$是希尔伯特空间，并且它是无限维的。

例3 $R^2[a,b]$空间，对$R^2[a,b]$中任意向量x、y，定义

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y}(t)\mathrm{d}t \tag{5.8}$$

易知$R^2[a,b]$按(5.8)中内积成为内积空间，又由内积(5.8)

导出的范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

我们知道$R^2[a, b]$是不完备的内积空间，也即是内积空间，但不是希尔伯特空间。这个空间的完备化就是大家熟悉的$L^2[a,b]$空间。

例4 $L^2[a,b]$空间，对$L^2[a,b]$中任意向量x,y定义

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t \tag{5.9}$$

易知$L^2[a,b]$按(5.9)中内积成为内积空间，又由内积(5.9)导出的范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

即为§4·2例5中所定义的范数($P=2$)，$L^2[a,b]$是希尔伯特空间，因此，$L^2[a,b]$是完备的内积空间，也就是希尔伯特空间。

上面各内积空间显然都是可分的，也即它们都有可列的稠密子集。

最后我们指出，由于内积空间(或希尔伯特空间)都是赋范空间(或巴拿赫空间)。因此，前面所讲过的度量空间，赋范空间(或巴拿赫空间)的结论都适用于它们。除此之外，要特别注意，它们由于有了内积，它们还具有一般赋范空间(或巴拿赫空间)所不具备的种种性质。

§5·2 正交性与投影定理

因为内积空间是定义了内积的特殊的线性赋范空间，因此，它有一般赋范空间所不具备的特殊性。这一节，我们由内积引入向量的正交的概念，向量到子空间上正交投影概念，从而为建立所谓希尔伯特空间的几何学作好准备。其中要建立重要的投影定理。

定义1 设X是内积空间，x,y是X中两个向量，如果

$$\langle x,y\rangle=0$$

则称x与y互相垂直或正交，记为$x\perp y$，设M是X的子集，当x与M中一切向量正交时，称x与M正交，记作$x\perp M$。设M与N是X的两个子集，如果对任何$x\in M$及$y\in N$都有$x\perp y$，就称M与N正交，记作$M\perp N$。设M是X的子集，X中所有与M正交的向量全体称为M的正交补，记作$M^{\perp}$。

关于向量正交，正交补有如下一些基本的有用性质：

1° 设X为内积空间，$x,y\in X$，则当$x\perp y$时

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \tag{5.10}$$

〔证明〕 当$x\perp y$时，$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle=0$

从而 $\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle$

$$=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$$

$$=\|x\|^2+\|y\|^2$$

注意，若$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$成立，未必能推断$x\perp y$，只在$X$是实内积空间中成立。公式(5.10)也叫做勾股公式

2° 设X是内积空间，$M\subset X$，则$M^{\perp}$是X的闭线性子空间。

〔证明〕 如果$x_1,x_2\in M^{\perp}$，那末对任何$y\in M$有

$$\langle x_1,y\rangle=\langle x_2,y\rangle=0$$

这时对任何数α，β由内积的性质(2)得到

$$\langle \alpha x_1+\beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle = 0$$

因此 $\alpha x_1+\beta x_2$与任何$y\in M$正交，即$\alpha x_1+\beta x_2\in M^{\perp}$，所以$M^{\perp}$是个线性子空间，又如果$x_n\in M^{\perp}$，$x_n\to x_0$，那末由内积的连续性，对任何$y\in M$成立

$$\langle x_0, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = 0$$

所以$x_0\in M^{\perp}$。因此，$M^{\perp}$是个闭线性子空间。

3° 设X是内积空间，$M\subset X$，则

$$M\cap M^{\perp} = \{0\}$$

〔证明〕 设$x\in M\cap M^{\perp}$时，则$x\in M$，$x\in M^{\perp}$由正交补的定义

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0,\ x = 0$$

从而

$$M\cap M^{\perp} \subset \{0\}$$

故当M为X的子空间时，则有

$$M\cap M^{\perp} = \{0\}$$

4° 设X是内积空间，$M\subset X$，若$\overline{M} = X$，

$$M^{\perp} = \{0\}$$

〔证明〕 设$\overline{M} = X$，若$x_0\in M^{\perp}$，对任意$x\in M$，则

$$\langle x_0, x\rangle = 0$$

因$x_0 \in X = \overline{M}$，故存在$x_n \in M$，使得$\| x_n - x_0 \| \to 0$，从而由内积的连续性

$$\langle x_0, x_0 \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_0, x_n \rangle = 0$$

即$x_0 = 0$，又由性质2°知$M^{\perp} \neq \phi$，故$M^{\perp} = \{0\}$

由性质2°可知，X为希尔伯特空间时，则它的任一子集M的正交补$M^{\perp}$也必是希尔伯特空间。而性质4°告诉我们，X的稠密子集的正交补只能是零向量。

定义2 设X是内积空间，M_1及M_2是X的两个线性子空间，如果$M_1 \perp M_2$，那末$M = \{x_1 + x_2 | x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$为$M_1$与$M_2$的正交和，记为$M_1 \oplus M_2$。

类似地可以定义有限个线性子空间的正交和。

定义3 设M是内积空间X的线性子空间，$x \in X$，如果有$x_0 \in M$，$x_1 \perp M$使得

$$x = x_0 + x_1$$

则称x_0是x在M上的(正交)投影。

一般说来，对于内积空间X中的任意向量x及任意线性子空间M，x在M上的投影并不一定存在。但是如果x在M上有投影的话，那末投影必定是唯一的，因为如果x_0及x_0'都是x在M上的投影，由定义可知x_0，$x_0' \in M$，$x - x_0 \perp M$，$x - x_0' \perp M$，因此，$x_0 - x_0'$既属于M，又与M正交，而与自身正交的元只有零向量，所以$x_0 = x_0'$。

投影有下面的重要性质：

定理1 设M是内积空间X的线性子空间，$x \in X$，如果是x_0在M上的投影，那末

$$\| x - x_0 \| = \inf_{y \in M} \| x - y \| \tag{5·11}$$

〔证明〕 因为x_0是x在M上的投影，所以$x_0 \in M$，$x - x_0 \perp M$，对于任何$y \in M$，由于$x - y = (x - x_0) + (x_0 - y)$而$x_0 - y \in M$，因此，$x - x_0 \perp x_0 - y$，故由“勾股定理”得到

$$\| x - y \|^2 = \| x - x_0 \|^2 + \| x_0 - y \|^2 \geqslant \| x - x_0 \|^2 \tag{5·12}$$

显然(5·12)式中只有在$x_0 = y$时才成立等号，由(5·12)式即知(5·11)成立，并且(5·11)中右边的下确界只有在$y = x_0$时达到。 〔证毕〕

定理1说明用M中的元y来逼近x时，当且仅当y等于x在M上的投影x_0时，逼近的程度最好。因此，在随机过程理论和逼近论中常用投影的这个性质来研究最佳逼近。

下面我们要证明当M为希尔伯特空间X的子空间时，X中任何元x在M上的投影必存在。因此，X可以分解成M与$M^{\perp}$的正交和。

将向量向子空间投影，这在欧几里得空间的解析几何学中也是一种重要方法。本章前几节所研究的也正是欧几里得空间中投影理论的拓广，它可以看成希尔伯特空间中解析几何学的一部分。

我们首先给出下面一个重要引理

引理1（变分引理） 设X是内积空间，M是X中非空凸集，并且按X中由内积导出的距离完备，那末对每个$x \in X$，存在唯一的$y \in M$，使得

$$\| x - y \| = d(x, M) = \inf_{y \in M} \| x - y \| \tag{5·13}$$

〔证明〕 令$\delta = d(x, M)$，由下确界定义，存在$y_n \in M$，$n = 1, 2, \cdots$，使

$$\delta_n = \| x - y_n \| \to \delta (n \to \infty) \tag{5·14}$$

令 $v_n = y_n - x$，则$\| v_n \| = \delta_n$，且

$$\| v_n + v_m \| = \| y_n + y_m - 2x \| = 2 \| \tfrac{1}{2}(y_n + y_m) - x \|$$

因为M为凸集，所以$\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$，由此可得$\| v_n + v_m \| \geqslant 2\delta$，又因为$y_n - y_m = v_n - v_m$，由平行四边形公式有

$$\| y_n - y_m \|^2 = \| v_n - v_m \|^2 = -\| v_n + v_m \|^2 + 2(\| v_n \|^2 + \| v_m \|^2)$$

$$\leqslant -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2)$$

由(5·14)，知$\{ y_n \}$是M中哥西点列，但M按内积导出的距离完备，因而存在$y \in M$，使$y_n \to y$，因为$y \in M$，所以$\| x - y \| \geqslant \delta$，但是

$$\| x - y \| \leqslant \| x - y_n \| + \| y - y_n \| = \delta_n + \| y_n - y \|$$

上面不等式右端当$n \to \infty$时，极限为δ，所以得到$\| x - y \| = \delta$。

若又有$y_0 \in M$，使得$\| x - y_0 \| = \delta$，由平行四边形公式，

$$\| y - y_0 \|^2 = \| (y - x) - (y_0 - x) \|^2$$

$$= 2\| y - x \|^2 + 2\| y_0 - x \|^2 - \| (y - x) + (y_0 - x) \|^2$$

$$= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\| 1/2(y + y_0) - x \|^2$$

由M的凸集性，$\frac{1}{2}(y + y_0) \in M$，所以$\| \frac{1}{2}(y + y_0) - x \|^2 \geqslant \delta^2$因此，$0 \leqslant \| y - y_0 \|^2 \leqslant 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0$。

因而$\| y - y_0 \| = 0$，即$y = y_0$，这就证明了唯一性。

〔证毕〕

当M是X的完备子空间时，M当然是X中的凸集，所以由引理1得到下面的推论

推论1 设X是内积空间，M是X的完备子空间，则对每个$x\in X$，存在唯一的$y\in M$，使

$$\|x-y\|=d(x,M)$$

变分引理又称极小化向量定理，它是内积空间的一个基本定理，在微分方程，现代控制论和逼近论中有重要应用。

引理2 设X是内积空间，M是X的线性子空间，$x\in X$，若存在$y\in M$，使得$\|x-y\|=d(x,M)$，那末$x-y\perp M$。

〔证明〕 令$z=x-y$，若z不垂直于M，那么必有$y_1\in M$，使得

$$\langle z,y_1\rangle\neq 0$$

显然$y_1\neq 0$，另一方面，对任何复数α，有

$$\begin{aligned}\|z-\alpha y_1\|^2&=\langle z-\alpha y_1,\ z-\alpha y_1\rangle\\&=\langle z,z\rangle-\overline{\alpha}\langle z,y_1\rangle-\alpha[\langle y_1,z\rangle\\&\quad-\overline{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle]\end{aligned}$$

令 $\overline{\alpha}=\dfrac{\langle y_1,z\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}$，则上式右端方括号中式子为0，又因$\|z\|=d(x,M)$，因此

$$\|z-\alpha y_1\|^2=\|z\|^2-\frac{|\langle z,y_1\rangle|^2}{\langle y_1,y_1\rangle}<d^2(x,M)$$

但是由于$y+\alpha y_1\in M$，所以

$$\|z-\alpha y_1\|=\|x-y-\alpha y_1\|\geqslant d(x,M)$$

这与$\|z-\alpha y_1\|<d(x,M)$矛盾。因此，$x-y\perp M$。

〔证毕〕

由引理1、2立即得到下面的定理。

定理2（投影定理） 设M是内积空X的完备线性子空间，则成立

$$X = M + M^{\perp}$$

〔证明〕 因为M是X的闭子空间，所以M是X的完备子空间，由推论1及引理2，对任何$x \in X$，存在唯一$y \in M$及$z \in M^{\perp}$，使

$$x = y + z$$

又若另有$y_1 \in M$及$z_1 \in M^{\perp}$使$x = y_1 + z_1$，则$y_1 - y = z_1 - z$，因$y - y_1 \in M$，$z_1 - z \in M^{\perp}$，于是$y_1 - y = z_1 - z \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$，因此，$y = y_1$，$z = z_1$，这就证明了$X = M + M^{\perp}$。 〔证毕〕

利用投影，可以定义X到Y上的映射P如下：

对任一$x \in X$，令

$$P_x = y$$

其中y是x在Y上的投影，称P为M到Y上的投影算子。投影算子具有下列一系列性质。

1° P是X到Y上线性有界算子，且当$Y \neq \{0\}$时，$\|P\| = 1$。

2° $PX = Y$，$PY = Y$，$PY^{\perp} = \{0\}$。

3° $P^2 = P$，其中$P^2 = PP$

推论1 设M是内积空间X中的完备子空间，而且$M \neq$

X，那末$M^{\perp}$中有非零元素。

〔证明〕 由于$X \neq M$，取$x \in X - M$，x在M上的投影记为x_0，这时$x - x_0 \perp M$，但因$x \overline{\in} M$，$x_0 \in M$，所以$x - x_0 \neq 0$。 〔证毕〕

容易看出，当M是希尔伯特空间，M是X的闭线性子空间时，引理1，2，定理2及推论1等都成立。

推论2 设X是希尔伯特空间，M是X的线性子空间，则

$$\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$$

特别地，如果$M^{\perp} = \{0\}$，则M在X中稠密。

〔证明〕 由性质2$(M^{\perp})^{\perp}$是X的闭线性子空间，它也可以看成是一个希尔伯特空间，显然$(M^{\perp})^{\perp} \supset \overline{M}$。另一方面，设$x \in M^{\perp\perp}$，由投影定理，存在$y \in \overline{M} \subset M^{\perp\perp}$及$z \in M^{\perp}$，使$x = y + z$，因为$x \in M^{\perp\perp}$，并且$M^{\perp\perp}$是线性空间，所以$x - y \in M^{\perp\perp}$，因此，$z = x - y \in M^{\perp} \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$，即$z = 0$，所以$x = y \in \overline{M}$，这就证明了$M^{\perp\perp} \subset \overline{M}$，因此，

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$$

特别当$M^{\perp} = \{0\}$时，$(M^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = X$，即

$\overline{M} = X$，所以M在X中稠密。

注意到如果M是X的闭线性子空间时，推论2可以改写为

论推2′ 设X是希尔伯特空间，M是X的闭线性子空间，

$$M=(M^{\perp})^{\perp}$$

作为投影定理的应用，下面我们介绍最小二乘法：

在实际问题中常会遇到这样的问题：设有函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，但人们并不知道f的具体表达式是什么，此时人们往往用线性函数 $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ 去近似代替$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。但是系数α_i（$i=,12,\cdots,n$）怎样选择呢？常用的一种方法就是最小二乘法。其具体作法是：

对（$n+1$）个变量$y,x_1,x_2,\cdots,x_n$进行m次观察测得各个变量的值为：$y_i,x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots x_n^{(i)}$（$i=1,2,\cdots,m$），令

$$\triangle(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left[\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j^{(i)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

作为衡量总误差的标准，那末问题就归结为求一组 $\alpha_1^{(0)}$，$\alpha_2^{(0)}$，…，$\alpha_n^{(0)}$，使得

$\triangle(\alpha_1^{(0)},\cdots,\alpha^{(0)})=\inf\{\triangle(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha)|(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in R^n\}$

此时，称 $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(0)}x_i$ 为函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最佳均方根逼近。

又例如：已知函数$f\in L^2[a,b]$，用n次多项式来逼近，也就是要找一组数$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$使得误差

$$\|f(t)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i t^i\|=\left(\int_a^b f|(t)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i t^i|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

成最小。也即在$L^2[a,b]$的子空间$M=\text{span}\{1,t,\cdots,t^n\}$上求$y\in M$，使得

$$\|f-y\|=\inf\{\|f-x\| \, x\in M\}$$

所有上述这样的一类最佳逼近问题，都可抽象归纳为希尔伯特空间或内积空间中逼近问题。

设X是内积空间，$y,x_1,x_2,\cdots,x_n$是X中的$n+1$个向量，要求一组数$\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},\cdots,\alpha_n^{(0)}$，使得

$$\|y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(0)}x_i\|=\inf\{\|y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\| \,|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R\}$$

$$=d(y,\text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\})$$

因为$M=\text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是有限维空间，必是$X$的完备子空间，由引理1必有$x_0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(0)}x_i\in M$，使得$\|y-x_0\|$达到最小值。并且不妨假定$x_1,x_2\cdots,x_n$是线性无关的，不然的话可取其任一极大线性无组来代替它，此时$\alpha_1^{(0)}$，$\alpha_2^{(0)},\cdots,\alpha_n^{(0)}$可如下法求出之。

由引理2

$$\langle y-x_0,x\rangle=0 \qquad x\in M$$

这显然等价于$\langle y-x_0,\ x_i\rangle=0 \quad i=1,2,\cdots,n$得到一个$n$元代数方程组：

$$\langle y-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,x_i\rangle=0 \quad i=1,2,\cdots,n$$

即 $$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle x_j,x_i\rangle=\langle y,x_i\rangle \qquad i=1,2,\cdots,n$$

由于引理1达到最小的$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是唯一的，同时又由于$x_1, x_2, \cdots, x_n$是线性无关的，易知上述方程有唯一解，因此方程组的系数行列式不等于0，因而解就是：

$$\alpha_i^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle y, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle y, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_2\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_n\rangle & \cdots & \langle y, x_n\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_i, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_i, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_2\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_n\rangle & \cdots & \langle x_i, x_n\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$

§5·3 内空积间中的正交系

在§5·2里引进了内积空间中的向量的正交概念，这在内积空间和希尔伯特空间的理论中起基础作用，特别重要的是，类似于欧氏空间中的正交坐标系，在内积空间中也可以引入正交系的概念——即空间中向量成对正交的集，它也是数学分析中正交函数系概念的推广。

定义1 设M是内积空间X的一个不含零的子集，若M中向量两两正交，则称M为X中的正交系，又若M中向量范数都为1，则称M为X中就范正交系。

即对所有$x, y \in M$

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

若一正交系或就范正交系M是可列的，我们可以把它排成一序列$\{x_n\}$，并分别地称它为正交序列或就范正交序列，或干脆统统称为正交系。这种情况下有

$$\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

例1　在n维欧几里得空间R^n中

$$e_1 = (1,0,0,\cdots,0)$$
$$e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$e_n = (0,0,0,\cdots,1)$$

组成就范正交系。

例2　在空间$L^2[0,2\pi]$中，定义内积为

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x, f, g \in L^2[0,2\pi]$$

则三角函数系$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$为$L^2[0,2\pi]$中就范正交系。

正交系有以下基本性质：

1．对正交系M中任意有限个向量$x_1, x_2, \cdots, x_n$成立：

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 \quad (5.15)$$

〔证明〕由于M中向量两两正交，所以

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i\right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_j, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \| x_\nu \|^2$$

2. 正交系M是X中线性无关子集

〔证明〕 设$x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$，而且 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$，其中$\alpha_1$，$\alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$n$个数，则对任何$1 \leqslant i \leqslant n$，有

$$0 = \langle \sum_{i}^{n} \alpha_i x_i, x_j \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \| x_j \|^2 \tag{5.16}$$

所以$x_1, x_2, \cdots$，x_n线性无关，这就证明了M是X中线性无关子集。

我们在内积空间中引入就范正交系的目的是要把空间中的向量关于就范正交系展开成级数，为此，首先介绍一般线性赋范空间中级数收敛的概念。

定义 2 设X是线性赋范空间，$x_i, i = 1, 2, \cdots$是X中一列向量，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$\cdots$是一列数，作形式级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \tag{5.17}$$

称 $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$为级数(5.17)的$n$项部分和，若存在$x \in X$，使$S_n \to x$，则称级数(5.17)收敛，并称$x$为这个级数的和，记为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

若M为X中就范正交系，e_1，e_2，…是M中有限或可列个向量，且$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$，则对每个自然数$j$，由内积连续性，可以得到

$$\langle x, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \alpha_j$$

所以
$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

定义3 设M为内积空间X中的就范正交系，$x \in X$，称数集

$$\{ \langle x, e \rangle \mid e \in M \}$$

为向量x关于就范正交系M的富里叶系数集，而称$\langle x, e \rangle$为x关于e的富里叶系数。

例3 设$X = L^2[0, 2\pi]$，M为例2中三角函数系，对于任何$f \in L^2[0, 2\pi]$，f关于M的富里叶系数集即为

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \langle f, \cos nt \rangle, n = 1, 2 \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt = \langle f, \sin nt\rangle$$

$$n = 1, 2, \cdots$$

所以内积空间X中向量x关于就范正交系M的富里叶系数，实际上是数学分析中富里叶系数概念的推广。

下面讨论富里叶系数的性质：

引理1 设X是内积空间，M是X中就范正交系，任取M中有限个向量$e_1, e_2, \cdots, e_n$那末成立

（1）
$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \geqslant 0$$

（2）
$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \geqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \right\|$$

，其中$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为任意$n$个数。

〔证明〕 因为对任意n个数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，有

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \langle x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x\rangle$$

$$- \langle x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\rangle + \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\rangle$$

$$= \| x \|^2 - 2R_e \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \langle x, e_i \rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

令$\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$，$i = 1, 2, \cdots, n$代入上式即得（1），另一方面由上式及结论（1），我们又有

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \|^2 - \| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \langle x, e_i \rangle|^2 \geqslant 0$$

由此知（2）成立。〔证毕〕

从引理1中（2）的证明中，可以看出在（2）中仅当

$$\alpha_i = \langle x, e_i \rangle \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

时等号才成立，其次还可以看出，若用$e_1, e_2, \cdots, e_n$的线性组合逼近x，则取$\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$，$i = 1, 2, \cdots, n$时逼近为最佳。

定理1（贝塞不等式） 设$\{e_k\}$是内积空间X中的有限或可列就范正交系，那末对每个$x \in X$，成立不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \| x \|^2 \qquad (5 \cdot 18)$$

〔证明〕 如果$\{e_i\}$中只有有限个向量，则结论由引理1的(1)立即可得，当$\{e_k\}$可列时，只要在引理的(1)中令$n \to \infty$，即得（5·18）式。〔证毕〕

如果贝塞不等式中等号成立，则称此等式为巴塞伐尔等

式。

引理2 设$\{e_k\}$为希尔伯特空间中可列就范正交系，那末成立：

（1）级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$收敛的充要条件为级数$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$收敛；

（2）若$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$，则$\alpha_i=\langle x,e_i\rangle$，$i=1,2,\cdots$，故

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,\ e_i\rangle\ e_i$$

（3）对任何$x\in X$，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle\ e_i$收敛。

〔证明〕（1）设$S_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$，$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$，

由于$\{e_i\}$为就范正交系，所以任何自然数m和n，$n>m$成立

$$\|S_n-S_m\|^2=\|\alpha_{m+1}e_{m+1}+\alpha_{m+2}e_{m+2}+\cdots+\alpha_n e_n\|$$

$$=\sum_{i=m+1}^{n}|\alpha_i|^2=\sigma_n-\sigma_m$$

所以$\{S_n\}$是X中哥西点列的充要条件为$\{\sigma_n\}$是哥西点列，由X和数域的完备性，知（1）成立。

（2）已证过。

（3）由贝塞不等式，知级数$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2$

收敛，由（1）及（2），知级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$ 收敛。

〔证毕〕

推论1 设 $\{e_i\}$ 是 X 中可列就范正交系，则对任何 $x\in X$，

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0$$

〔证明〕 由引理1，对任何 $x\in X$，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$$

收敛，所以一般项 $\langle x,e_n\rangle\to0\ (n\to\infty)$ 〔证毕〕

当 X 为 $L^2[0,2\pi]$，M 为三角函数系时，推论1即为黎曼——勒贝格定理，我们的兴趣在于什么时候向量 x 可以写成富里叶系数所作的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$$

的和。为此，首先引入完备就范正交系的概念。

定义4 设 $\{e_k\}$ 是内积空间 X 中的就范正交系，如果对任何 $x\in X$ 成立巴塞伐尔等式

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2 \qquad (5.19)$$

则称正交系 $\{e_k\}$ 是完备的（或称为封闭的，故巴塞伐尔等式也称为封闭方程）。

定理2 内积空间 X 的就范正交系 $\{e_k\}$ 是完备的充要条件为对任何 $x\in X$，$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$。

〔证明〕　必要性：令$\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$，对任何$n$有，

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \| = \| x \|^2 - \langle x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \rangle$$

$$- \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, x \rangle + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

$$= \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

$$= \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$$

此即　$x = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$成立。

充分性：因为

$$\| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

$$- \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 + \sum_{m=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

$$= \| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \|^2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

此即　$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} | \langle x, e_k \rangle |^2$

定义5 设$\{e_k\}$是内积空间X中的就范正交系，对$x\in X$，形式级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$,(不管它是否收敛)称为向量$x$关于$\{e_k\}$的富里叶级数，或称富里叶展开式，当$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$成立时，就称$x$关于$\{e_k\}$可以展开成富里叶级数。

不难明白，当x关于$\{e_k\}$可以展开成富里叶级数时，展开式$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$的几何意义就是向量$x$等于它在$\{e_k\}$的每一个方向的分量之和。

下面介绍正交系的完全性以及它与完备性的关系。

定义6 设M是内积空间X中的就范正交系，如果

$$M^{\perp}=\{0\}$$

则称M是X中的完全就范正交系。

由定义可知，M是完全的，就是在X中不存在与M正交的非零向量。因此，它的意思就是正交系M已经不能再扩大了，即M是X中最大的就范正交系。我们也可以用巴塞伐尔等式来检验就范正交系的完全性。

定理3 M是希尔伯特空间中完全就范正交系的充要条件为对所有$x\in X$成立巴塞伐尔等式。

〔证明〕 充分性：设巴塞伐尔等式对所有$x\in X$成立，若M不完全，由定义4，存在$x_0\neq 0$，$x_0\perp M$，所以对任何$e\in M$，有$\langle x_0,e\rangle=0$。由于对该点x_0成立巴塞伐尔等式

$$\|x_0\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x_0, e_K\rangle|^2$$

所以 $\|x_0\|=0$，即 $x_0=0$，这与$x_0\neq 0$矛盾。

必要性：设M是X中完全就范正交系，对任何$x\in X$，设其非零富里叶系数为 $\langle x,e_k\rangle$，$k=1,2,\cdots$，由引理2，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$$

收敛，设其和为y，则对任何自然数 i，有

$$\langle x-y,e_i\rangle=\langle x,e_i\rangle-\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle\langle e_j,e_i\rangle$$

$$=\langle x,e_i\rangle-\langle x,e_i\rangle=0$$

又对M中一切使 $\langle x,e\rangle=0$的向量e，有

$$\langle x-y,e\rangle=\langle x,e\rangle-\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle\langle e_j,e\rangle=0$$

因此，$x-y\perp M$，由M的完全性，得到$x-y=0$，即 $x=y$，所以

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle e_j$$

由此得到

$$\|x\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\langle x, e_j\rangle|^2$$

即 巴塞伐尔等式成立。〔证毕〕

由定理3的证明，可以看出，当M是希尔伯特空间X中

完全就范正交系时，X中每个向量都x可以展成级数

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle e_j \qquad (5\cdot20)$$

显然，(5·20)式为向量x关于就范正交系M的富里叶展开式。

推论 2（斯切克洛夫（Стеклов）定理） 设M是希尔伯特空间中就范正交系，若巴塞伐尔等式在X的某个稠密子集N上成立，则M完全。

〔证明〕 设$E=\overline{span M}$则E是X中闭线性子空间，因在N上巴塞伐尔等式成立，由定理2易知对N中每个向量x，都成立

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$$

所以$x\in E$，因而$N\subset E$，由于E是闭线性子空间，故有$\overline{N}\subset E$，但因$\overline{N}=X$，所以$E=X$，即M是X中完全就范正交系。 〔证毕〕

利用推论2可以证明例2中三角函数系是$L^2[0,2\pi]$中，完全就范正交系。所以对任何$f\in L^2[0,2\pi]$，$f(x)$都可展开成富里叶级数

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

其中等号右端级数是指在$L^2[0,2\pi]$中平方均收敛。a_0，a_k，b_k分别为例3中关于三角函数系的富里叶系数。

由上所述，可见完全就范正交系是研究希尔伯特空间的重要工具。那么是否每个非零希尔伯特空间都有完全就范正交系，以及如何去得到完全就范正交系？为此，首先介绍一

般的格拉姆-许密特(Gram-Schmidt)正交化过程。

引理3 设$\{x_1,x_2,\cdots\}$是内积空间X中有限或可列个线性无关向量，那末必有X中就范正交系$\{e_1,e_2,\cdots\}$，使对任何正整数n有

$$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

〔证明〕 令 $e_1=\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$，则 $\|e_1\|=1$，且

$$\text{span}\{e_1\}=\text{span}\{x_1\}$$

令 $v_2=x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1$，因$x_1$，$x_2$线性无关，所以$v_2\neq0$，且$v_2\perp e_1$

令 $e_2=\dfrac{v_2}{\|v_2\|}$，则$e_2\perp e_1$，显然

$$\text{span}\{e_1,e_2\}=\text{span}\{x_1,x_2\}$$

依此法继续下去，如果已作了e_1，e_2，$\cdots e_{n-1}$，其中$\|e_i\|=1$，$i=1,2,\cdots,n-1$，并且两两正交，满足$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\}=\text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$，则令$v_n=x_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\langle x\ ,e_k\rangle e_k$，由$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关知$v_n\neq0$，令$e_n=\dfrac{v_n}{\|v_n\|}$，则$\|e_n\|=1$，且$e_n\perp e_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$，又显然满足$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，这样一直下去，即可得到所要求的就范正交系。 〔证毕〕

引理3的证明过程称为格拉姆-许密特正交化过程。

容易明白$\sum\limits_{i=1}^{n-1}\langle x_n,e_i\rangle e_i$是向量$x_n$在空间$\text{span}\{x_1,x_2$

$\cdots, x_{n-1}\}$上的投影。

现在我们可以回答上面提出的问题：每个非零希尔伯特空间必有完全就范正交系。

定理4 每个非零希尔伯特空间必有完全就范正交系。

〔证明〕只对可分的情况证明，设X为可分希尔伯特空间，则存在有限或可列个向量$\{x_i\}$，使$\text{span}\{x_i\}=X$，不妨设$\{x_i\}$为X中的线性无关子集，否则取$\{x_i\}$中的线性无关子集，由引理3，存在有限或可列个就范正交系$\{e_i\}$，使对任何自然数n，成立

$$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

所以，由$\{e_i\}$张成的线性空间包含$\{x_i\}$，因此，

$\overline{\text{span}\{e_i\}}\supset\overline{\text{span}\{x_i\}}=X$，即$\{e_i\}$是$X$中完全就范正交系。

例4 设$L^2[0,2\pi]$是$[0,2\pi]$上平方L可积复值函数空间，令

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)\qquad(5.21)$$

则 $\langle\varphi_m,\varphi_n\rangle=\int_0^{2\pi}\varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\delta_{m,n}=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$

因此，$\{\varphi_n\}$是正交就范系，且可以证明$\{\varphi\ \}$是完全就范正交系。当$L^2[0,2\pi]$是实值平方可积函数空间时，就是例2中的三角函数系，它也是完全就范正交系。

例5 设$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n n(n-1)\cdots(k+1)$

$\cdot x^k$

$$= e^{x}\frac{d^{n}}{dx^{n}}(x^{n}e^{-x})$$

称$L^2(x)$为拉格朗日多项式，可以证明

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!}e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)\ (n=0,2,1,\cdots) \quad (5.22)$$

是空间$L^2 10,+\infty)$的一个完全就范正交系。

例6 设$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x})$，称$H_n(x)$为哈密顿多项式，可以证明

$$\varphi_n(x)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x^2}{2}}H_n(x) \quad (5.23)$$

$(n=0,1,2,\cdots)$是空间$L^2(-\infty,+\infty)$的一个完全就范正交系。

例7 设$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1_n)$(称$P_n(x)$为勒让得多项式，可以证明

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

是空间$L^2[-1,1]$的一个完全就范正交系。

为了研究希尔伯特空间及其上的线性算子，把一个抽象的希尔伯特空间表示成一个具体的希尔伯特空间是有好处的

定义5 设X和$\widetilde{X}$是两个内积空间，若存在X到$\widetilde{X}$上的映射，使对任何$x,y\in X$及数α,β满足

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \quad (5.24)$$

$$\langle Tx,Ty\rangle = \langle x,y\rangle$$

则称X和$\widetilde{X}$同构，并称T 为X到$\widetilde{X}$上的同构映射。

定理5 两个希尔伯特空间X与$\widetilde{X}$同构的充要条件是 X 与$\widetilde{X}$具有相同的希尔伯特维数。

〔证明〕 若X与$\widetilde{X}$同构，T为X到$\widetilde{X}$上的同构映射，由(5.24)易知T将X中完全就范正交系映射成$\widetilde{X}$中完全就范正交系，并且T是一对一的，所以X与$\widetilde{X}$具有相同的希尔伯特维数。

反之，若X与$\widetilde{X}$的希尔伯特维数相同，不妨设 $X\neq\{0\}$，否则结论是平凡的。设M和$\widetilde{M}$分别是X和$\widetilde{X}$中完全就范正交系，并由假设知M和$\widetilde{M}$具有相同的基数，所以可将M与$\widetilde{M}$分别写成$M=\{e_k,k\in J\}$，$\widetilde{M}=\{\widetilde{e}_k h,\in J\}$，其中$J$为与$M$和$\widetilde{M}$等基数的指标集，由定理2及（5.20）式，对任何$x\in X$及$\widetilde{x}\in$ 有$\widetilde{X}$，

$$x=\sum_{k\in J}\langle x,e_k\rangle e_k;\quad \widetilde{x}=\sum_{k\in J}\langle\widetilde{x},\widetilde{e}_k\rangle\widetilde{e}_k$$

并且$\sum_{k\in J}|\langle x,e_k\rangle|^2=\|x\|^2<\infty$，$\sum_{k\in J}|\langle\widetilde{x},\widetilde{e}_k\rangle|^2$ $=\|\widetilde{x}\|^2<\infty$。设$x=\sum_{k\in J}\langle x,e_K\rangle e_k$，令$Tx=\sum_{k\in J}\langle x,e_k\rangle$ $\widetilde{e}_k$，由引理2，$Tx\in\widetilde{X}$，且对X中任何两个向量

$$x=\sum_{k\in J}\langle x,\ e_k\rangle e_k$$

$$y=\sum_{k\in J}\langle y,\ e_k\rangle e_k$$

成立

$$\langle Tx,Ty\rangle=\langle\sum_{k\in J}\langle x,\ e_k\rangle\tilde{e}_k,\sum_{k\in J}\langle y,\ e_k\rangle\tilde{e}_k\rangle$$

$$=\sum_{k\in J}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,\ e_k\rangle}=\langle x,\ y\rangle$$

又若 $\tilde{x}=\sum_{k\in J}\langle\tilde{x},\ \tilde{e}_k\rangle\tilde{e}_k$为$\tilde{X}$中任何向量，令$x=\sum_{k\in J}\langle\tilde{x},\ \tilde{e}_k\rangle e_k$，由引理2知$x\in X$，显然$Tx=\tilde{x}$，即T是到$\tilde{X}$上的映射，易知T也是保持线性运算不变，所以T为$X$到$\tilde{X}$上同构映射，即$X$与$\tilde{X}$同构。〔证毕〕

对于可分希尔伯特空间，由定理3并利用格拉姆-许密特方法，可得下面的推论。

推论3 任何可分希尔伯特空间必和某个R^n或l^2同构。

§5·4 希尔伯特空间的自共轭性

希尔伯特空间的自共轭性是希尔伯特空间另一个重要性质，它在希尔伯特空间与其上线性算子理论研究中起着重要作用。本节首先给出希尔伯特空间上连续线性泛函的一般表示形式，指出希尔伯特空间具有重要的自共轭性。

与一般的巴拿赫空间一样，希尔伯特空间也有共轭空间，由于希尔伯特空间是特殊的有内积的完备空间，以致其

上的连续线性泛函有十分简单的表示形式。

设X是希尔伯特空间，对任意固定的$y\in X$

$$f_y(x)=\langle x,y\rangle \qquad x\in X \qquad (5\cdot25)$$

易知f_y是X上的线性泛函，且因，对任意$x\in X$有

$$|f_y(x)|=|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$$

知 $$\|f_y\|\leqslant\|y\|$$

也即 $f_y\in X^*$，f_y是X上的连续线性泛函，其中X^*表示X上线性连续泛函所成的巴拿赫空间，并且又由

$$|f_y(y)|=\langle y,y\rangle=\|y\|^2\leqslant\|f_y\|\,\|y\|$$

知 $$\|y\|\leqslant\|f_y\|$$

也即 $$\|f_y\|=\|y\| \qquad (5\cdot26)$$

这就表明，任意$y\in X$，由内积（5·25）表示X上的一个连续线性泛函f_y，且其范数与向量y的范数是相等的。

我们可以证明，对希尔伯特空间来说，其逆命题也成立，也即有如下重要定理。

定理1（**黎斯Riesz表示定理**）设X是希尔伯特空间，f是X上线性连续泛函，那么存在唯一的$z\in X$，使对每个$x\in X$，有

$$f(x)=\langle x,z\rangle \qquad (5\cdot27$$

并且 $$\|f\|=\|z\|$$

〔证明〕 若$f=0$，则令$z=0$，结论自然成立。若$f\neq0$，令$N(f)$为f的零空间，由（5·27）可知，如果这样的z存在，那么必有$z\in N(f)^{\perp}$。因$f\neq0$，所以$N(f)\neq X$，又因f是X上线性连续泛函，由§4·6定理2知$N(f)$为X的闭子空间，所以完备，由投影定理，$N(f)^{\perp}\neq\{0\}$设$z_0\neq0\in N(f)^{\perp}$，对任何$x\in X$，令$v=f(x)z_0-f(z_0)x$，

则 $$f(v)=f(x)f(z_0)-f(z_0)f(x)=0$$

即　$v\in N(f)$，所以

$$0=\langle v,\ z_0\rangle=\langle f(x)z_0-f(z_0)x,\ z_0\rangle$$

由于 $\langle z_0,\ z_0\rangle=\|z_0\|^2\neq 0$，所以

$$f(x)=\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}\langle x,\ z_0\rangle=\langle x,\ \overline{\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}}z_0\rangle$$

令

$$z=\overline{\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}}z_0,\quad \text{则}\quad f(x)=\langle x,\ z\rangle$$

这就证明了，任一连续线性泛函$f\in X^*$，都有相应的向量$z\in X$，使$f(x)$能表示为x与z的内积。下面再证z是由f唯一确定的。

若另有$z_1\in X$，使对任何$x\in X$，成立$f(x)=\langle x,\ z_1\rangle$，那么 $\langle x,\ z-z_1\rangle=0$，特取$x=z-z_1$，则 $\|z-z_1\|^2=\langle z-z_1,\ z-z_1\rangle=0$，所以$z=z_1$，这就证明了唯一性，又由前面开头的讨论知有

$$\|f\|=\|z\| \qquad \text{〔毕证〕}$$

推论1　设X为希尔伯特空间，令$Ty=f_y$，其中

$$f_y(x)=\langle x,\ y\rangle \qquad x\in X$$

则　（1）T是X到X^*上（共轭）线性算子，

（2）T是X到X^*上的等距算子。

〔证明〕（1）容易看出，对任何x，$y\in X$及任何数α，β成立

$$T(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}Tx+\bar{\beta}Ty \qquad (5\cdot28)$$

事实上，对任何$z\in X$有

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y)(z)&=\langle z,\ \alpha x+\beta y\rangle\\&=\bar{\alpha}\langle z,\ x\rangle+\bar{\beta}\langle z,\ y\rangle\\&=\bar{\alpha}Tx(z)+\bar{\beta}Ty(z)\end{aligned}$$

$$= (\overline{\alpha}\, Tx + \overline{\beta}\, Ty)(z)$$

所以（5.27）式成立。这就证明了推论中的（1）。

（2）由定理1知$\|Ty\| = \|y\|$，因此T是等距的算子，即T是X到X^*上的等距算了。〔证毕〕

通常称此算子T：$X \to X^*$为黎斯映射。

推论告诉我们，希尔伯特空间X与它的共轭空间是共轭同构的，等距的，简称为等距（共轭）同构的。因此可视它们是同一空间，记作为

$$X = X^*$$

因而希尔伯特空间是自共轭空间，当然，对复数空间而言这里的同构与上一章的同构意义上不同，但对实空间而言，这里的同构与上一章的同构意义上是一样的。这是因为

$$f_{\alpha u}(x) = \overline{\alpha}\ \langle x, u\rangle = \overline{\alpha} f_u(x) = (\overline{\alpha} f_u)(x)$$

故 $\quad f_{\alpha u} = \overline{\alpha}\, f_u$，即 $\quad T(\alpha u) = \overline{\alpha}\, Tu$

即数α及$u \in X$，把αu视为泛函时，它在点x的值是泛函u在点的x值乘以$\overline{\alpha}$。

所以，空间l^2，$L^2[a,b]$，R^n，C^n都是自共轭空间，但我们注意，不能把自共轭空间理解为希尔特特空间的同义语，事实上，这是两个不同的概念，并且确实有自共轭空间，它并不是希尔伯特空间，另外，X^*中元素及内积未必都与X中的元素及内积完全一致，只不过是从等距（共轭）同构的意义下它们是相同的。

§5·5 希尔伯特空间的伴随算子（共軛算子）

上一章我们讨论过定义在赋范空间上的线性算子的共轭

算子。在希尔伯特空间中共轭算子有更深刻的重要意义，它导致了一系列在线性算子理论中起着重要作用的其它基本概念。

定理1　设X和Y是两个希尔伯特空间，$A\in B(X\to Y)$，那么存在唯一的$A^*\in B(Y\to X)$，使对任意$x\in X$及$y\in Y$，成立

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle \tag{5.29}$$

并且 $\|A^*\| = \|A\|$。

〔证明〕 对任意$y\in Y$，令

$$f_y(x)= \langle Ax,y\rangle \qquad x\in X$$

由于$A\in B(X\to Y)$，易知f_y是X上线性泛函，并且由许瓦兹不等式

$$|f_y(x)| = |\langle Ax,y\rangle| = \|Ax\|\ \|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|\ \|y\|,\ x\in X。$$

即$f_y\in X^*$，并且$\|f_y\|\leqslant\|A\|\ \|y\|$，由黎斯表示定理，存在唯一$z\in X$，使对任何$x\in X$，成立

$$\langle Ax,y\rangle = f_y(x)= \langle x,z\rangle$$

并且$\|f_y\| = \|z\|$，令$A^*y=z$，则$\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle$。

下面证$A^*\in B(Y\to X)$，事实上，对任何$y,z\in Y$及数α,β，因为当$x\in X$时，成立

$$\langle Ax,\alpha y+\beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle Ax,y\rangle + \overline{\beta}\langle Ax,z\rangle$$

$$= \overline{\alpha}\langle x,A^*y\rangle + \overline{\beta}\langle x,A^*z\rangle$$

$$= \langle x,\alpha A^*y+\beta A^*z\rangle$$

所以$A^*(\alpha y+\beta z)=\alpha A^*y+\beta A^*z$，即$A^*$是线性算子，又由$A^*$定义，对任何$y\in Y$，有$\|A^*y\| = \|f_y\|\leqslant$

$\|A\|\|y\|$，因此$A^*\in B(Y\to X)$，且$\|A^*\|\leqslant\|A\|$，另一方面，在（5.29）中令$y=Ax$，则有

$$\|Ax\|^2=\langle x,\ A^*Ax\rangle\leqslant\|x\|\ \|A^*A\ x\|\leqslant\|x\|\ \|A^*\|\ \|Ax\|$$

因此当$Ax\neq 0$时成立

$$\|Ax\|\leqslant\|A^*\|\ \|x\| \tag{5.30}$$

当$Ax=0$时，（5.30）式自然成立，因而$\|A\|\leqslant\|A^*\|$，这就证明了$\|A\|=\|A^*\|$。又若另有算子$B\in B(Y\to x)$，使对任何$x\in X, y\in Y$成立

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,By\rangle$$

则$\langle x,(B-A^*)y\rangle=0$，令$x=(B-A^*)y$，则$\|(B-A^*)y\|=0$，即$By=A^*y$，因此$B=A^*$。〔证毕〕

定义1 设A是希尔伯特空间X到希尔伯特空间Y中的线性有界算子，则称定理1中的算子A^*为A的希尔伯特伴随算子（或希尔伯特共轭算子），或简称为共轭算子。

关于共轭算子有以下基本性质：

1° $(A+B)^*=A^*+B^*$

2° $(\alpha A)^*=\overline{\alpha}A^*$

3° $(A^*)^*=A$

4° $\|A^*A\|=\|AA^*\|=\|A\|^2$

特别 $A^*A=0$等价于$A=0$

5° 当$X=Y$时，$(AB)^*=B^*A^*$

例1 设C^n是n维复内积空间，$e_1,e_2,\cdots e_n$是C^n的就范正交基。设A是C^n到C^n的线性有界算子。由于$e_1, e_2,\cdots, e_n$是C^n的基，A是线性算子，所以Ae_i（$i=1,2,\cdots, n$）的值决定了算子A。如果

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \tag{5·31}$$

当 $x \in C^n, y = Ax$，y用$e_1, e_2, \cdots, e$ 表示时，即

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

由（5.31）式就得到

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j Ae_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j e_i$$

比较系数即得

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

由上所述，c^n中线性算子A由矩阵（a_{ij}）$_{n\times n}$所 决 定。 而任何n^2个数a_{ij}由（5·31）式决定了一个线性算子A，我 们把n阶方阵（a_{ij}）称为线性算子A在就范正交系下 的 表 示阵。由（5·31）式知

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$$

容易知道，在取定的就范正交基下，线性算子A与它的表示阵（a_{ij}）之间的这种对应关系是算子与n阶方 阵 之 间

的一一对应。

如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 那么 $a_{ij}=\langle Ae_j, e_i\rangle$，于是

$$\langle A^*e_j, e_i\rangle=\overline{\langle e_i, A^*e_j\rangle}=\overline{\langle Ae_i, e_j\rangle}=\overline{a_{ji}}$$

因此A*的表示阵$(\overline{a_{ji}})$就是A的表示阵(a_{ij})的共轭阵（即先取转置阵，再对每个元素取复共轭）

例2 设$L^2[a,b]$空间，A是弗雷德霍蒙 Fredholm 型积分算子

$$Ax(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds,\quad x(s)\in L^2[a,b] \quad (5\cdot32)$$

其中$K(t, s)$是矩形R：$[a, b]\times[a, b]$上可测函数，而且$|K(t, s)|^2$在R上可积，A是$L^2[a,b]$上的线性有界算子。

现在我们证明由下式定义的算子A*是A的共轭算子：

$$A^*x(t)=\int_a^b \overline{K(s,t)}x(s)ds,\quad x(s)\in L^2[a,b] \quad (5\cdot33)$$

由于$\overline{K(s, t)}$在R上是可测而且绝对值平方可积，因此，由(5·33)式定义的算子A*是线性有界算子。要证明它确是A的共轭算子，只要证明(5.29)式成立就可以了，就是要证明对任何$x, y\in L^2[a,b]$，成立$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$。对于$x, y\in L^2[a,b]$，$x=x(t)$，$y=y(s)$，那末显然函数$x(t)y(s)$在$R$上是绝对平方可积的，由富比尼定理（§4.3）

$$\langle x,A^*y=\int_a^b x(t)\overline{\int_a^b \overline{K(s,t)}\, y(s)dsdt}$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(t)\overline{y(s)}\,ds\,dt$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(t,s)x(s)\overline{y(t)}\,ds\,dt$$

$$= \langle Ax, y \rangle$$

所以由(5·33)定义的算子A^*是A的共轭算子。

由例1我们看到，共轭算子是共轭矩阵概念的推广，它具有许多与共轭矩阵相类似的性质。参看§4·8。

在矩阵理论中，我们已经研究过埃尔米特阵，酉算和正常阵。下面我们在希尔伯特空间中建立起相应的自伴算子、酉算子和正常算子的概念。

定义2 设T为希尔伯特空间X到X中的线性算子，若$T = T^*$，则称T为X上的自伴算子；若$TT^* = T^*T$，则称T为X上正常算子；若T是X到X上的一对一的映射，且$T^* = T^{-1}$，则称T为X上的酉算子。

当T是自伴算子时，由T^*的定义，对一切x，$y \in X$成立

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \tag{5·34}$$

显然自伴算子必为正常算子。又由酉算子定义，成立

$$T^*T = TT^* = I \tag{5·35}$$

其中I为X上恒等算子；反之，若(5·35)成立，则T为X上酉算子。由(5·35)式知酉算子必为正常算子，正常算子不一定是酉算子或自伴算子。

例如 $T = 2iI$，则 $T^* = -2iI$，所以 $TT^* = T^*T = 4I$，即T是正常算子，但显然T不是自伴算子和酉算子。

例3 在例1中n阶矩阵：$A=(a_{ij})_n$为C^n到C^n中的线性算子，则A的希尔伯特伴随算子$A^*=(\overline{a_{ji}})_n$也即A的共轭转置矩阵。显然A为自伴算子的充要条件为a_{ij}

$=\overline{a_{ji}}$。

例4 设X为希尔伯特空间，A为X到X中的线性算子，对任意$x\in X$有$Ax=\lambda x$（λ是常数）

对于任意$u,v\in X$

$$\langle Au,v\rangle=\langle\lambda u,v\rangle=\langle u,\overline{\lambda}v\rangle=\langle u,A^*v\rangle$$

因此，$A^*u=\overline{\lambda}u$。

所以，A是自伴算子的充要条件是$\lambda=\overline{\lambda}$，即$\lambda$是实数。

下面我们给出判定自伴算子的几个定理。

定理2 设T为希尔伯特空间X上线性有界算子，则T为自伴算子的充要条件为对一切$x\in X$，$\langle Tx,x\rangle$是实数。

〔证明〕 若T为自伴算子，则对所有$x\in X$，有

$$\overline{\langle Tx,x\rangle}=\langle x,Tx\rangle=\langle Tx,x\rangle$$

因此$\langle Tx,x\rangle$是实数。

反之，如果对所有$x\in X$，$\langle Tx,x\rangle$皆为实数，则

$\langle Tx,x\rangle=\langle x,Tx\rangle$，通过直接验算有

$$\langle Tx,y\rangle=\frac{1}{4}[\langle T(x+y),x+y\rangle-\langle T(x-y),x-y\rangle]+\frac{i}{4}[\langle T(x+iy),x+iy\rangle-\langle T(x-iy),x-iy\rangle]$$

再由$\langle T(x+y),x+y\rangle=\langle(x+y),T(x+y)\rangle$

得

$$\langle Tx,y\rangle=\frac{1}{4}[\langle(x+y),T(x+y)\rangle-\langle(x-y),T(x-y)\rangle]$$

$$+\frac{i}{4}[\langle(x+iy),T(x+iy)\rangle-\langle(x-iy),T(x-iy)\rangle]=\langle x,Ty\rangle$$

故T为自伴算子。 〔证毕〕

至于自伴算子的运算，由定义立即可知，若T_1和T_2是X上两个自伴算子，则T_1+T_2，T_1-T_2仍为X上自伴算子，关于乘法有下面的定理。

定理3 设T_1和T_2是希尔伯特空间X上两个自伴算子，则T_1T_2自伴的充要条件是$T_1T_2=T_2T_1$。

〔证明〕由共轭算子的性质$(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*=T_2\cdot T_1$，所以$T_1$，$T_2$自伴的充要条件为$T_1T_2=T_2T_1$。

定理4 设T为希尔伯特空间X上的线性有界算子，则T为正常算子的充要条件为对任何$x\in X$，成立$\|T^*x\|=\|Tx\|$。

〔证明〕 必要性：若$T^*T=TT^*$，则对任何$x\in X$成立

$$\|T^*x\|^2=\langle T^*x,T^*x\rangle=\langle TT^*x,x\rangle=\langle T^*Tx,x\rangle$$

$$=\langle Tx,Tx\rangle=\|Tx\|^2$$

所以$\|T^*x\|=\|Tx\|$

充分性：若对任何$x\in X$，成立$\|T^*x\|=\|Tx\|$，则

$$\langle(T^*T-TT^*)x,x\rangle=\langle T^*Tx,x\rangle-\langle TT^*$$

$x,x\rangle = \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = 0$

即$TT^* = T^*T$，故T为正常算子。

定义3 设T是希尔伯特空间X上的有界自伴算子，且对任何$x\in X$，$\langle Tx,x\rangle \geqslant 0$，则称T为正算子如果$\langle Tx,x\rangle > 0$，$x\neq 0$，则称T为严格正算子。

定理5 希尔伯特空间X到其闭子空间M上的投影算子P：$X\to M$是自伴算子，且P还是正算子。

〔证明〕 由投影定理对任意$x\in X$有唯一的正交分解：

$$x = x^* + (x - x^*),\quad x^*\in M,\quad x - x^*\in M^\perp$$

$y = y^* + (y - y^*)$，$y^*\in M$，$y - y^*\in M^\perp$

$Px = x^*$，$Py = y^*$。易知对任意x，$x\in X$有

$$\begin{aligned}\langle Px,y\rangle &= \langle x^*, y^* + (y - y^*)\rangle \\ &= \langle x^*, y^*\rangle = \langle x^*, Py\rangle \\ &= \langle x, Py\rangle\end{aligned}$$

且P为有界线性算子，因此P为自伴算子。且显然亦为正算子。

习 题

1．试在$C[a,b]$空间上定义一种内积，并写出此内积诱导出来的范数与距离。

2．设$R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$是一列内积空间，令

$$R = \left\{ \{x_n\} \,\middle|\, x_n\in R_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

在R中定义运算

$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\}$ （α，β为复数）并定义 $\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n,y_n\rangle$

证明R是内积空间。

3．证明下列等式成立

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$。

4．若内积空间X是实的，证明条件$\|x\|=\|y\|$可推出$\langle x+y,x-y\rangle=0$，若$X=R^2$，其几何意义是什么？若X是复的这个条件可推出什么？

5．用直接计算验证下式对内积空间任意元素成立。

$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\|z-\frac{1}{2}(x+y)\|^2$

6．设$x\neq0$，$y\neq0$

(a)若$x\perp y$，证明$\{x,y\}$是线性无关集；

(b)将(a)推广到互相正交的非零向量$x_1,x_2,\cdots,x_n$。

7．证明由$y\perp x_n$和$x_n\to x$，可推出$x\perp y$。

8．设$\{x_n\}$是内积空间的序列，证明由条件$\|x_n\|\to\|x\|$和$\langle x_n,x\rangle\to\langle x,x\rangle$可推出收敛性$x_n\to x$。

9．证明在内积空间内，$x\perp y$当且仅当对所有标量α有$\|x+y\|=\|x-\alpha y\|$。

10．证明在$[-1,1]$上所有的连续实值函数组成的向量空间X是$[-1,1]$上的所有偶的连续函数集与所有奇的连续函数集的正交和。

11．设X为内积空间，M是X的线性子空间，若对任何$x\in X$，x在M上有正交投影存在，证明M是闭线性子空间。

12. 证明空间C^n的子集$M=\left\{y=(\eta_i)\mid \sum_{i=1}^{n}\eta_i=1\right\}$是完备的和凸的。

13. 设A是内积空间X的非空子集，证明

(a) $A\subset A^{\perp\perp}$

(b) $A^{\perp^{\perp^{\perp}}}=A^{\perp}$

14. 从不等式 $\sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|$ 推出许瓦兹不等式：

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$$

15. 若(e_k)是内积空间X的就范正交序列，并且$x\in X$，证明$x-y$正交于子空间$Y_n=\mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$这里$y$由下式给出

$$y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k,\alpha_k=\langle x,e_k\rangle$$

19. 设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是内积空间$X$的正交集，设$x\in X$是任何固定的元素，且$y=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n$，则$\|x-y\|$依赖于$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，通过直接计算证明当且仅当$\beta_i=\langle x, e_i\rangle$ $i=1, 2, \cdots, n$时，$\|x-y\|$取最小值。

17. 设$x(t)$是$[-\pi,\pi]$上的连续函数，求出$x(t)$的n次最佳三角多项式逼近。

18. 设$x(t)=t^k$，在区间$[-1, 1]$上使序列$(x_0, x_1, \cdots)$的前三项成就范正交。

19.若 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$（$\{e_k\}$是就范正交序列）

收敛，证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2=\|x\|^2$$

20.设$\{e_k\}$是希尔伯特空间H内一个就范正交序列，证明若

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k,\quad y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k$$

则

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\overline{\beta}_k$$

假定上述级数是绝对收敛的。

21.设$\{\alpha_k\}$是希尔伯特空间H内的一就范正交 序列，证明对每个$x\in H$在H内存在向量

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$$

并且对任一e_k与$x-y$是正交的。

22. 设M是内积空间X内完全集，若对所有$x\in M$，有$\langle V,x\rangle=\langle W,x\rangle$，证明$V=W$。

23. 设M是尔伯特空间H的子集，且设$V,W\in H$，假定对所有$x\in M$由$\langle V,x\rangle=\langle W,x\rangle$可得$V=W$，若它对所有$V$，$W\in H$成立，证明$M$在$H$内是完全的。

24 证明在R^3上的任何线性泛函f能用点积表示

$$f(x)=x\cdot z=\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2+\xi_3\zeta_3$$

其中　$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$。

25．证明在l^2上的任何有界线性泛函f能表示为如下形式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\zeta_i}$$

其中$z=\{\zeta_i\}\in l^2$。

26．在l^2中定义如下的算子，取有界实数列$\{\alpha_n\}$，对于每一个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令$Ax=(\alpha_1\xi_1,\ \alpha_2\xi_2,\cdots)$，证明A是自共轭的。

27．$L^2(a,b)$中，用下面式子定义算子A：

$Af(t)=tf(t)\quad t\in[a,b]$、$f(t)\in L^2[a,b]$

验证A是自共轭算子。

28．证明酉矩阵的列向量构成关于C^n上内积的就范正交集。

29．证明等矩的线性算子T：$H\to H$满足$T^*T=I$，式中I是H上的恒等算子，

30．设$e_1,e_2,\cdots,e_n$为内积空间X中就范正交系，证明X到span$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$的投影算子P为

$$Px=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i,\ x\in X。$$

第六章　线性算子谱论简介

谱论是泛函分析及其应用的一个重要分支。它起源于线性方程（代数的、微分的、积分的）特征理论，将它推广到有界线性算子的情况，研究它的结构，就是算子的谱理论，特征值的概念将相应地扩展为“谱”。由于特征值和逆算子有密切的关系，谱论也大量涉及逆算子的问题。泛函分析发展的历史表明，将算子求逆应用到微分算子和积分算子上便推动了微分方程和积分方程的发展。

§6·1　谱的概念

为了使我们易于理解谱的概念。我们从熟悉的代数中的特征值问题引出谱的概念，然后推广到无限维的情形。

考察n个未知数的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=y_n \end{cases} \tag{6.1}$$

它对应的系数矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，记$x=(x_1,x_2\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$则上述方程表示n维空间E^n上的线性算子A：$Ax=y$，对复数λ若存在$x\neq0$，使$Ax=\lambda x$，则称λ是A的特征值。它意味着$(A-\lambda I)x=0$有非零解，即算子$(A-\lambda I)$不存在逆算子。

我们熟知，令(6.1)的系数行列式$\det(A-\lambda I)=0$，这

就得到A的特征方程

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\det(A-\lambda I)$叫做A的特征行列式，把它展开，我们就得到一个λ的n次多项式，叫做A的特征多项式。我们把A的全部特征值的集合叫做算子A的谱，记为$\sigma(A)$；它在复平面的余集$\rho(A)=C-\sigma(A)$叫做A的预解集。

例如　由直接计算可以验证

$$x_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \quad 和 \quad x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

分别是$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\1 & 2\end{pmatrix}$的对应于特征质$\lambda_1=6$和$\lambda_2=1$的特征向量。它的特征行列式

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+6=0$$

谱是$\{6, 1\}$，对应于6和1的A的特征向量可分别由

$$\left.\begin{aligned}-\xi_1+4\xi_2=0\\ \xi_1-4\xi_2=0\end{aligned}\right\} \quad 和 \quad \left.\begin{aligned}4\xi_1+4\xi_2=0\\ \xi_1+\xi_2=0\end{aligned}\right\}$$

得到。

下面我们转向讨论无限维空间的情形，但在无限维的情况下就不是这样简单了，而要复杂得多。

设X是复线性空间，$T\in B(X\to X)$的线性算子，算子$T-\lambda I$，记为

$$T_\lambda=T-\lambda I \qquad (6.2)$$

其中λ是复数，I是恒等算子。如果T_λ有逆算子，把它记为$R_\lambda(T)$，亦即

$$R_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1} \qquad (6.3)$$

并把它叫做T的预解算子，或称为T的预解式。$R_\lambda(T)$或简写为R_λ。

若方程 $$T_\lambda x=(T-\lambda I)x=0 \qquad (6.4)$$

有非零解$x\in X$，则称λ为算子T的特征值，对应的非零解x称为T的对应特征值的特征向量。

定义1 设X是复赋范空间，$T\in B(X\to X)$，若R_λ存在且是定义在整个X上的有界线性算子，则称T是X的正则算子，称λ是算子的正则点，T的正则点的全体称为T的正则集，或预解集，记为$\rho(T)$。

定义2 若λ不是T的正则点（即T_λ没有有界逆算子），则称λ为T的谱点，谱点的全体称为T的谱，记为$\sigma(T)$。

$\sigma(T)$还可以分成以下三种类型：

（1）对$\lambda\in\sigma(T)$，方程$(T-\lambda I)x=0$有非零解，则称λ为T的特征值，而称对应的非零解x为T的特征向量，T的特征值全体称为T的谱，记为$\sigma_p(T)$。

（2）对$\lambda\in\sigma(T)$，方程$(T-\lambda I)x=0$只有零解，T_λ的值域在X中稠密，则称λ的全体为T的连续谱，记为$\sigma_c(T)$。

（3）对$\lambda\in\sigma(T)$，方程$(T-\lambda I)x=0$只有零解，T_λ的值域在X中不稠密，则称λ的全体为T的剩余谱，记为$\sigma_r(T)$。

例1 考察复连续函数空间$C[0,1]$中的乘法算子：

$$Tx(t)=tx(t)$$

设$\lambda\in[0,1]$，在$C[0,1]$上定义算子R_λ于下：

$$R_{\lambda}x(t)=\frac{x(t)}{t-\lambda}.$$

由$\lambda\overline{\in}$ [0,1] 容易证明，R_{λ}是定义在C [0,1] 上且值域包含在C [0,1] 中的有界线性算子，任取$x(t)\in C$ [0,1] 有：

$$R_{\lambda}(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})x(t)=(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})R_{\lambda}x(t)=x(t)$$

即 $R_{\lambda}(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})=(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})R_{\lambda}=\mathrm{I}$

所以，$R_{\lambda}=(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})$是有界线性算子，因此$\lambda$是T的正则值。

现设$\lambda\in$ [0,1]，由

$$(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})x(t)=(t-\lambda)x(t),\quad x(t)\in C[0,1]$$

且当$t=\lambda$时，$(t-\lambda)x(t)=0$，因此，当$x(t)$跑遍C [0,1] 时，$(t-\lambda)x(t)$的全体组成的集在C [0,1] 中不稠密。而且当$\lambda\in$ [0,1] 时，λ不可能是T的特征值。事实上，假定有$x_0(t)\neq0$，$x\in C$ [0,1]，使得

$$(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})x_0(t)=(t-\lambda)x_0(t)=0$$

则$x_0(t)=0$对任何$t\neq\lambda$，由$x_0(t)$的连续性，必有$x_0(t)=0$，这就表明方程$(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})x=0$在$C$ [0,1] 中无非零解。所以当$\lambda\in$ [0,1] 时，λ都是T的剩余谱的点。

即 $\sigma(\mathrm{T})=\sigma_r(\mathrm{T})=[0,1]$，而$\rho(\mathrm{T})=C-[0,1]$。

§6·2 有界线性算子谱的基本性质

一个给定算子的谱有哪些性质？它依赖于算子定义的空间，以及所论的算子是哪一类的算子。本节将给出在复巴拿赫空间X上有界线性算子谱的最基本的性质。

定理1（逆算子） 设$\mathrm{T}\in B(X\to X)$，其中X是巴拿赫

空间，如$\|T\|<1$，则$(I-T)^{-1}$存在，它是整个空间X上有界线性算子，且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k=I+T+T^2+\cdots \qquad (6\cdot5)$$

这里的级数按$B(X\to X)$中范数收敛。

〔证明〕 因为$\|T^2\|\leqslant\|T\|^2$，故$\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$，但$\|T\|<1$，必有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k<\infty$$

所以

故 $$\sum_{k=0}^{\infty}\|T^k\|<\infty$$

$\sum_{k=0}^{\infty}T^k$一致收敛于某有界算子S（按$B(X\to X)$中范数收敛），下面要证明的是$S=(I-T)^{-1}$。

为此，我们计算

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^n)$$
$$=(I+T+T^2+\cdots+T^n)-(T+T^2+\cdots+T^n+T^{n+1})$$
$$=I-T^{n+1}$$

现令$n\to\infty$，因为$\|T\|<1$，所以$T^{n+1}\to0$，因而有

$$(I-T)S=S(I-T)=I$$

这就证明了 $S=(I-T)^{-1}$。

定理2（谱集的闭性） 设$T\in B(X\to X)$，X是复巴拿赫空间，则$\rho(T)$是开集，$\sigma(T)$是闭集。

证明 若$\rho(T)=\phi$，则$\rho(T)$自然是开集，从而

$\sigma(T)$是闭集(实际上在定理4中可以看到$\rho(T)\neq\phi$)。

设$\rho(T)\neq\phi$,对固定的$\lambda_0\in\rho(T)$及任意的$\lambda\in C$,我们有

$$T-\lambda I=T-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I$$

$$=(T-\lambda_0 I)[I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)]$$

现在考察$I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)$,由$\lambda_0\in\rho(T)$,$(T-\lambda_0 T)^{-1}$是有界算子,且非零,对于使

$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$ 则

$\|(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)\|\leqslant 1$

由定理1知

$$V=[I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)]$$

有逆算子

$$V^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}[(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R^k_{\lambda_0} \tag{6·6}$$

$\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\|<1$,亦即

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \tag{6·7}$$

因为$T_{\lambda_0}^{-1}=R_{\lambda_0}\in B(X\to X)$,对每一个满足(6.7)的$\lambda$,算子$T_\lambda$都有逆算子,即

$$R_\lambda=T^{-1}=(T_{\lambda_0}V)^{-1}=V^{-1}R_{\lambda_0} \tag{6·8}$$

所以(6·7)表示由T的正则值λ组成的λ_0的邻域,由于$\lambda_0\in\rho(T)$是任意的,所以$\rho(T)$是开集,从而它的余集$\sigma(T)=C-\rho(T)$是闭集。

值得注意的是,在定理2的证明中,我们还可以得到用λ的幂级数表示的预解式的一种基本表示式。事实上从(6·7)与(6·8)立即可得出下面的

定理3（预解式表示定理） 设$T\in B(X\to X)$，X是复巴拿赫空间，对每个$\lambda_0\in\rho(T)$，预解式$R_\lambda(T)$有表示式

$$R_\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_{\lambda_0}{}^{k+1} \qquad (6\cdot9)$$

在复平面上由下式所给的开圆盘

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

中，对每一个λ级数（6·9）是绝对收敛的。这圆盘是$\rho(T)$的子集。

作为定理1的另一推论，我们将证明对于有界线性算子，它的谱是复平面中的有界集。这个重要事实，现明确叙述如下

定理4（谱） 设$T\in B(X\to X)$，X是复巴拿赫空间，则$\sigma(T)$是园盘$|\lambda|\leqslant\|T\|$上的有界闭集，而T的预解集$\rho(T)$不空。

〔证明〕 设$\lambda\neq0$，根据定理1可得表达式

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k T^k \qquad (6.10)$$

对于$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|=\frac{\|T\|}{|\lambda|}<1$，即$|\lambda|>\|T\|$的一切$\lambda$级数（6·10）都收敛。这说明$\rho(T)\supset\{\lambda\,|\,|\lambda|>\|T\|\}$，故$\rho(T)$不空，由此知$\sigma(T)\subset\{\lambda\,|\,\|\lambda\|\leqslant\|T\|\}$，从而知$\sigma(T)$是有界的，再由定理2知$\sigma(T)$是闭的。

从刚才证明的定理4可知，复巴拿赫空间上的有界线性算子的谱是有界的，自然会提出包含整个谱的以原点为中心的最小圆盘问题。这个问题引出了下面的概念。

定义1 设$T\in B(X\to X)$，X是复巴拿赫空间，在复λ平面上包含$\sigma(T)$的以原点为中心闭园盘的半径称为T的谱半径，记为

$$r(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$$

由定理4可知，对于复巴拿赫空间上有界线性算子T的谱半径，显然有

$$r(T)\leqslant\|T\|$$

§6·3 有界自伴线性算子谱的基本性质

希尔伯特空间上的有界自伴线性算子已经在§5·5中给出它的定义，并讨论了它的一些最基本的性质，本节对自伴算子谱的最基本的性质作一些介绍。

定理1（特征值、特征向量）设$T\in B(X\to X)$是复希尔伯特空间X上的有界自伴算子，那么

（1）T的一切特征值（若存在）都是实的；

（2）对应于T的不同的特征值的特征向量是正交的。

〔证明〕（1）设λ是T的任何特征值，且x是对应的特征向量，那么$x\neq 0$，且$Tx=\lambda x$，由于T是自伴算子，故有：

$$\begin{aligned}\lambda\langle x,x\rangle &= \langle \lambda x,x\rangle = \langle Tx,x\rangle\\ &= \langle x,Tx\rangle = \langle x,\lambda x\rangle\\ &= \overline{\lambda}\langle x,x\rangle\end{aligned}$$

这里由于$x\neq 0$，故$\langle x,x\rangle=\|x\|^2\neq 0$，且除以$\langle x,x\rangle$得$\lambda=\overline{\lambda}$，因此$\lambda$是实的。

（2）设λ和μ是T的特征值，且设x和y是对应的特征向量，那么$Tx=\lambda x$，且$Ty=\mu y$。由于T是自伴算子

且μ是实的，故

$$\lambda\langle x,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle=\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$$
$$=\langle x,\mu y\rangle=\mu\langle x,y\rangle$$

由于$\lambda\neq\mu$，所以必有$\langle x,y\rangle=0$，这就意味着x与y是正交的。 〔证毕〕

定理2（预解集） 设$T\in B(X\to X)$是复希尔伯特空间X上的有界自伴线性算子，那么，数λ属于T的预解集$\rho(T)$当且仅当有$C>0$存在，使得对任何$x\in X$，有

$$\|T_\lambda x\|\geqslant C\|x\|$$

证明从略。

从这一定理可立即得到下面基本的

定理3（谱） 复希尔伯特空间X上的有界自伴算子$T\in B(X\to X)$的谱$\sigma(T)$是实的。

〔证明〕 利用定理2我们将证明，对于$\beta\neq0$的$\lambda=\alpha+i\beta$（α, β都是实数）一定属于$\rho(T)$从而$\sigma(T)\subset R$。

对于X中的任何$x\neq0$，有

$$\langle T_\lambda x,x\rangle=\langle Tx,x\rangle-\lambda\langle x,x\rangle \qquad (6.11)$$

并且由于$\langle x,x\rangle$和$\langle Tx,x\rangle$是实的(§5.5定理2)，故

$$\overline{\langle T_\lambda x,x\rangle}=\langle Tx,x\rangle-\bar{\lambda}\langle x,x\rangle \qquad (6.12)$$

这里$\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$，(6·11)(6·12)两式相减得

$$\langle T_\lambda x,x\rangle-\overline{\langle T_\lambda x,x\rangle}=(\lambda-\bar{\lambda})\langle x,x\rangle$$
$$=2i\beta\|x\|^2 \qquad (6.13)$$

等式(6.13)的左边是$-2iI_m\langle T_\lambda,x\rangle$，这里$I_m$表示虚部，后者不会超过它的模，除以2取绝对值，并应用许瓦兹不等式，得

$$|\beta|\,\|x\|^2 = |I_m\langle T_\lambda x, x\rangle| \leqslant |\langle T_\lambda x, x\rangle|$$
$$\leqslant \|T_\lambda x\|\,\|x\|$$

用$\|x\|\neq 0$除，得

$$|\beta|\,\|x\| \leqslant \|T_\lambda x\|$$

若$\beta\neq 0$，则由定理2得$\lambda\in\rho(T)$，因此对于$\lambda\in\sigma(T)$必有$\beta=0$，亦即，λ是实的，从而 谱$\sigma(T)\subset R$。 〔证毕〕

§6·4自伴全连续算子的特征展开

为了讨论自伴全连续算子的特征展开，我们首先给出全连续算子的定义。

定义1 设T是定义在线性赋范空间X上，而值域包含在Y中的线性算子，如果T将X中的任一有界集映成Y中的列紧集，则称T为全连续线性算子，简称全连续算子，也叫做紧算子。

由全连续算子定义可知：

1. 全连续算子必是连续算子；
2. 有限维空间至有限维空间的线性算子是全连续算子；
3. 值域$R(T)$是Y的有限维子空间的有界线性算子T是全连续算子；
4. 两个全连续算子之和，全连续算子与数的乘积是全连续算子。

例1 设$K(t,s)$在$[a,b]\times[a,b]$上连续，则由

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$$

定义的算子T是由$C[a,b]$到$C[a,b]$的全连续算子。

例2 设无穷矩阵（α_{ij}）满足

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2<+\infty$$

则由 $y=Tx$：$\eta_k=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{kj}\xi_j$（$k=1,2,\cdots$）

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2$定义了一个由$l^2$到$l^2$的全连续算子。

现在回到我们一开始提出的问题来，首先证明以下几个重要的引理。

引理1 设X是希尔伯特空间，T是X上的自伴算子，令

$$m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle,\quad M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle$$

其中m，M分别称为T的下界和上界。则有，

$$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}$$

〔证明〕 令$K=\max\{|m|,|M|\}$，由于

$$|M|=\left|\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle\right|\leqslant\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|$$

$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\|x\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|T\|\|x\|^2=\|T\|$$

又当$m\geqslant 0$时，显然有

$$|m|=m\leqslant M=|M|\leqslant\|T\|$$

当$m<0$时，

$$|m|=-m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle=\sup_{\|x\|=1}[-\langle Tx,x\rangle]$$

$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|\leqslant\|T\|$$

总之有$K\leqslant\|T\|$。下面证明$K\geqslant\|T\|$。

因为对任何$\lambda>0$，及任何$x\in X$，根据T的对称性可直接验证下面的等式成立：

$$\|Tx\|^2=\langle Tx,\ Tx\rangle$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\ \langle T(\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx),\ \lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\rangle$$

$$-\ \langle T(\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx),\ \lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\rangle\ \Big].$$

故

$$\|Tx\|^2\leqslant\frac{1}{4}K(\|\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\|^2+\|\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\|^2)$$

$$=\frac{1}{2}K(\lambda^2\|x\|^2+\frac{1}{\lambda^2}\|Tx\|^2),$$

又对任何$x\neq 0$，及$Tx\neq 0$，令$\lambda=\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{2}}$，则得

$$\|Tx\|^2\leqslant\frac{1}{2}K\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\|x\|^2+\frac{\|x\|}{\|Tx\|}\|Tx\|^2\right)$$

$$=K\|Tx\|\|x\|$$

故 $$\|Tx\|\leqslant K\|x\|$$

于是$\|T\|\leqslant K$，但已经证明$K\geqslant\|T\|$，故$\|T\|=K$。

〔证毕〕

引理2 设T为X到X的自伴全连续算子，则M与m中绝对值较大者为T的特征值，且T没有绝对值更大的特征值。

〔证明〕设$|M|>|m|$（$|M|\leqslant|m|$时证法相同），此时$M>0$，由引理1知

$$0<\|T\|=M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,\ x\rangle$$

故有 $\|x_n\|=1$，使 $\langle Tx_n, x_n\rangle \to M$，从而

$$0\leqslant \|Tx_n - Mx_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle + M^2\|x_n\|^2 \leqslant 2M^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0,$$

即 $Tx_n - Mx_n \to 0$，因T全连续，$\{x_n\}$ 有界，故有 $Tx_{n_k} \to y_0$，从而

$Mx_{n_k} \to y_0$（易知 $\|y_0\| \neq 0$），即

$$x_{n_k} \to \frac{1}{M} y_0，故\ Tx_{n_k} \to \frac{1}{M} Ty_0$$

由极限的唯一性知

$$\frac{1}{M} Ty_0 = y_0，即\ Ty_0 = My_0$$

所以M是T的特征值。

又因为$|\lambda| > M = \|T\|$时，λ为正则值，故T没有绝对值更大的特征值。

定义2 设E为X的子空间，T是X上的算子，如果对任何$x\in E$，总有$Tx\in E$，称E为算子T的不变子空间。

引理3 设X是希尔伯特空间，T是X上的自伴算子，x_1，x_2，…，x_n是T的一组特征向量，则由x_1，x_2，…，x_n所张成的子空间

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i 为复数 \right\}$$

及M在X中的正交补$M^{\perp}$都是T的不变子空间。

〔证明〕 M是T的不变子空间显然，只须证$M^{\perp}$是T的不变子空间。

对任何$y\in M^{\perp}$，看Ty是否$\perp M$。

由于任何对 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in M$，有

$$\langle Ty, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \rangle = \langle y, T\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \rangle$$

$$= \langle y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i \rangle$$

$$= 0$$

这就证明了Ty与M正交，即$Ty \in M^{\perp}$。

定理1 设T是希尔伯特空间X中的自伴全连续算子($T \neq 0$)，则T具有非零的有限个或可列个特征值$\{\lambda_i\}$，及对应的特征向量$\{e_i\}$，满足：

(1) $|\lambda_0| \geqslant |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| > \cdots$，$\{e_i\}$是就范正交系；

(2)当$\{\lambda_i\}$是无穷列时，定有$\lambda_i \to 0$；

(3)对任何$x \in X$，有

$$Tx = \sum_{i \in J} \langle Tx, e_i \rangle e_i$$

$$= \sum_{i \in J} \langle x, Te_i \rangle e_i = \sum_{i \in J} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

(3)就称为Tx的特征展开。

〔证明〕 根据引理2，可取M与m中绝对值较大者作为λ_0，取对应的特征向量为e_0，$\|e_0\| = 1$，由引理3知$X_1 = \{\alpha_0 e_0\}^{\perp}$是T的不变子空间，$X_1 \subset X$，将T视为$X_1$中的算子，它仍是自伴全连续算子，再根据引理2，可取$m_1 = \inf\limits_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\| = 1}} \langle Tx, x \rangle$，$M_1 = \sup\limits_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\| = 1}} \langle Tx, x \rangle$中绝对值较大者作为$\lambda_1$，并取对应的特征向量为$e_1$，$\|e_1\| = 1$，根据§6.3定理1$e_1 \perp e_0$。由引理3知，$X_2 = \{\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1\}^{\perp}$是T的不变子空间，$X_2 \subset X_1$，

将T视为X_2的算子，它仍为自伴全连续算子，又根据引理2，可取$m_2 = \inf\limits_{\substack{x \in X_2 \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x\rangle$，$M_2 = \sup\limits_{\substack{x \in X_2 \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x\rangle$ 中绝对值较大者作为λ_2，并取对应的特征向量为e_2，$\|e_2\| = 1$，显然有$|\lambda_0| \geqslant |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2|$，$\langle e_2, e_0\rangle = 0$，$\langle e_2, e_1\rangle = 0$，…，以上手续，或可无限进行下去，或至某$n$步时，T成为$X_n$上的零算子，总之可得有限个或可列个非零特征值$\{\lambda_i\}$及对应的特征向量$\{e_i\}$，现证此$\{e_i\}$满足(1)、(2)、(3)。

(1) 由$\{\lambda_i\}$及$\{e_i\}$的取法已得证，

(2)若$|\lambda_i| \geqslant e_0$，$i = 1, 2, \cdots$

则
$$\left|\frac{e_i}{\lambda_i}\right| = \frac{\|e_i\|}{|\lambda_i|} \leqslant \frac{1}{e_0}$$

即 $\left\{\frac{e_i}{\lambda_i}\right\}$是有界的，由于T是全连续算子，

故 $\left\{T\frac{e_i}{\lambda_i}\right\} = \{e_i\}$应有收敛子列，

这与$\{e_i\}$是就范正交系相矛盾。故有
$$\lambda_i \to 0 \ (i \to \infty)$$

(3) 对任何$x \in X$，由于
$$\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, e_k\rangle = 0,$$
$$k = 1, 2, \cdots, n$$

所以
$$x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \in X_n$$

又 $\left\| x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\right\|^2=\|x\|^2-2\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2$

$$+\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2$$

$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2$$

$$\leqslant\|x\|^2$$

所以 $\|T(x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i)\|\leqslant\|T\|_{x_n}\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\|\leqslant|\lambda_n|\,\|x\|\to 0$（或等于0）。

即 $Tx-T\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\to 0$（或等于0）

即
$$Tx=\sum_{i\in J}\langle x,e_i\rangle e_i$$
$$=\sum_{i\in J}\langle Tx,e_i\rangle e_i=\sum_{i\in J}\langle x,Te_i\rangle e_i$$
$$=\sum_{i\in J}\lambda_i\langle x,e_i\rangle e_i。$$
〔证毕〕

定理2 希尔伯特空间X上的全连续自伴算子T的非零谱点都是特征值，若X是无限维空间，则$0\in\sigma(A)$。

〔证明〕（1）首先要证T没有别的非零特征值。

若有$\lambda\neq\lambda_i$（$i=1,2,\cdots$），$\lambda\neq0$，λ是T的特征值，e是对应的特征向量由§6·3定理1知特征值对应的特征向量互相正交，故由(3)知应有 $Te=\sum_{i\in J}\langle Te,e_i\rangle e_i=\sum_{i\in J}\lambda_i\langle e,e_i\rangle$

$e_i=0$，这与$Te=\lambda e$，$\lambda\neq0$矛盾，所以T没有别的非零特征值。

(2) 若X是无限维空间，则0一定是谱点：$0\in\sigma(T)$，事实上若0是T的正则点，那么T^{-1}存在且是定义在全空间的有界算子，由于$I=TT^{-1}$，对X中任何有界点列$\{x_n\}$，$\{T^{-1}x_n\}$仍为有界点列，因为T是全连续的，$\{T(T^{-1}x_n)\}=\{x_n\}$将有收敛子列，但X是无限维的，知X中就范正交系$\{e_i\}$中不可能选出收敛子列，这就导致矛盾，所以$0\in\sigma(T)$。

(3) 若λ不是特征值，$\lambda\neq0$，则$\lambda\overline{\in}\sigma(T)$，(证略)。

关于谱的理论，我们就介绍到这里，至于这方面的更深入的理论，限于篇幅，我们不再细述了。

习　　题

1．举出一个线性算子$T:C[0,1]\to C[0,1]$它的谱是所给区间$[a,b]$。

2．设$X=C[0,2\pi]$，$Tx=e^{it}x(t)$，$x(t)\in X$，证明$\sigma(T)=\{\lambda:|\lambda|=1\}$。

3．设$X=l^2$，

$$Tx=T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots)$$

试求$\sigma(T)$。

4．设F是平面上无限有界闭集，$\{\alpha_n\}$是F的稠密子集，在l^2中定义算子T：

$$Tx=T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots,\alpha_nx_n,$$

…），则α_n都是特征值，$\sigma(T)=F$，$F-\{\alpha_n\}$中每一个点都是T的连续谱。

5. 设A是巴拿赫空间X上的线性有界算子，当$|\lambda|>\|T\|$时

$$R_\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}, \quad \|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}$$

6. 设T为X上的线性有界算子．λ，$\mu\in\rho(T)$，则

$$R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu$$

7. 设$X=l^\infty$，

$Tx=T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots)$

（a）如$|\lambda|>1$，证明$\lambda\in\rho(T)$，

（b）如$|\lambda|\leqslant1$，证明λ是特征值，并求出特征空间。

8. 设$X=l^p$（$1\leqslant p<+\infty$）

$Tx=T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots)$

如$|\lambda|=1$，λ是T的特征值吗？

9. 给出积分方程$Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt$的解。

其中$K(s,t)$在矩形R：$[a,b]\times[a,b]$上定义，$K(s,t)\in L^2(R)$。

10. 设T为希尔伯特空间X上的自伴全连续算子，$\{\lambda_i\}$为T的特征值，$\{e_i\}$为其对应的特征向量，又$\lambda\neq\lambda_i$（$i=1,2,\cdots$），$\lambda\neq0$，$y\in X$，求方程

$$Tx-\lambda x=y$$

的解。

第七章　泛函的极值

本章讨论一般的非线性泛函极值的求法。这原是变分学所研究的问题。在数学史中，人们普遍认为变分学是泛函分析的渊源之一。从十七世纪末开始，数学家们就研究了许多泛函极值的求法，得到了一系列重要结果，这些内容至今仍具有重要的应用价值。

这里我们把微积分中求函数极值的方法推广到求泛函极值（包括条件极值）上。将可以看到，在抽象空间中阐述这些内容，其深度和广度是微积分所无法比拟的。

§7·1　算子微分

本节把微积分中的梯度和全微分概念推广到抽象空间中来。

1．加脱（Gateaux）微分

定理1 设X为线性赋范空间，$x_0 \in X$，$f(x)$是在x_0及其邻域内有定义的泛函（一般地，它是非线性的）。如果对于任意的$h \in X$，极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

存在，记为$\delta f(x_0; h)$，则称之为泛函f在点x_0处关于增量h的一阶变分。

若令$\varphi(t) = f(x + th)$，这是一个普通的一元函数，则显

然有

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\delta f(x_0;h)$$

这是计算一阶变分的一个公式。它也可写成

$$\delta f(x_0;h)=\frac{d}{dt}f(x_0+th)\Big|_{t=0} \tag{7·1}$$

例1 考察n元函数$f(x)=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是定义在$R^n$上的泛函。显然$f:R^n\to R$，假定$f$具有连续一阶偏导数。对于点$x_0=(\xi_1^\circ,\xi_2^\circ,\cdots,\xi_n^\circ)$及任意的$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in R^n$，利用多元函数的复合求导法则，可得

$$\delta f(x_0;h)=\frac{d}{dt}f(\xi_1^\circ+th_1,\xi_2^\circ+th_2,\cdots,\xi_n^\circ+th_n)\Big|_{t=0}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}h_i\Big|_{x_0}$$

$$=\langle\nabla f|_{x_0},h\rangle \tag{7·2}$$

此结果还表明$\delta f(x_0;h)$是关于h的有界线性泛函。

定义2 在定义1中，如果$\delta f(x_0;h)$是关于h的有界线性函泛，记为

$$\delta f(x_0;h)=\langle f'(x_0),h\rangle \tag{7·3}$$

则称泛函f在x_0处是加脱可微的。表达式（7·3）称为泛函f在x_0处关于增量h的加脱微分，而有界线性泛函$f'(x_0)$称为泛函f的在x_0处的加脱导数。

在例1中，f的加脱导数就是函数f的梯度：$f'(x_0)=$

$\operatorname{grad} f \Big|_{x_0}$，而加脱微分(7.2)恰为函数$f$在点$x_0$处沿$h$方向的方向导数。

例2 设$X=C\ [0,1]$，考察定义在X上的泛函

$$f(x)=\int_0^1 g(x(t),t)\,\mathrm{d}t$$

其中二元函数$g(x,t)$的偏导数$g_x'(x,t)$假定是连续的，则对任意的$h(t)\in C[0,1]$，根据公式(7.1)，有

$$\delta f(x_0;h)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^1 g(x(t)+\alpha h(t),t)\mathrm{d}t\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_0^1 g_x'(x(t),t)h(t)\mathrm{d}t \qquad (7.4)$$

这是关于$h(t)\in C\ [0,1]$的有界线性泛函，**因此**，泛函f是加脱可微的。

例3 设$X=C^1\ [a,b]$，考察泛函

$$J(x)=\int_a^b g(x(t),\dot{x}(t),t)\,\mathrm{d}t$$

其中三元函数$g(x,u,t)$为连续，并对x和u具有一阶连续偏导数，则对任意的$h(t)\in C^1\ [a,b]$有

$$\delta J(x;h)=\int_a^b [g_x'(x(t),\dot{x}(t),t)h(t)$$

$$+g_{\dot{x}}'(x(t),\dot{x}(t),t)\dot{h}(t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b [g'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g'_{\dot{x}}]\ h(t)\ \mathrm{d}t+[g_{\dot{x}}'h(t)]_a^b$$

$$(7.5)$$

例4 考察二次泛函$f(x)=x^{T}Ax-2a^{T}x+b$其中$x\in R^{n}$，而A为$n\times n$阶对称矩阵，$a\in R^{n}$，b为常数，则可以求得其任一点$x_0\in R^{n}$处的加脱微分为

$$\delta f(x_0;h)=f'(x_0)h=\langle 2Ax_0-2a,h\rangle$$

类似地，我们可以定义算子的加脱微分。

定义3 设X、Y为巴拿赫空间，$x_0\in X$，算子$T:X\to Y$，它在x_0的某个邻域内有定义。如果对任意的$h\in X$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(x_0+th)-T(x_0)}{t}$$

存在，记为$\delta T(x_0;h)$，则称之为算子T在点x_0处关于增量h的一阶变分。如果$\delta T(x_0;h)$是关于h有界线性算子、记

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(x_0+th)-T(x_0)}{t}=T'(x_0)h \tag{7.6}$$

则称算子T在x_0处是加脱可微的，$\delta T(x_0;h)=T'(x_0)h$称为加脱微分，$T'(x_0)$称为加脱导数。

应该注意，$T'(x_0)\in B(X\to Y)$，而(7.6)式的极限是在空间Y中的范数意义下取的。

2．弗力许（Frechet）微分

由上述定义可知，加脱微分推广了熟知的梯度概念，这是一种较弱的微分概念。它的定义并不需要X中的范数，因此，无法由加脱可微性推出连续性。下面，我们引入另一种较强的微分——弗力许微分，它推广了微积分中的全微分概

念。

定义4 设X、Y为巴拿赫空间，算子T：$X\to Y$（一般地，T是非线性的）。如果存在有界线性算子$A\in B(X\to Y)$使得关系式

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(x_0+th)-T(x_0)}{t}=Ah \quad (7.7)$$

对于满足$\|h\|=1$的$h\in X$是一致地成立，则称算子T在点$x_0\in X$是弗力许可微的，并且称$T'(x_0)=A$为算子T在点x_0处的弗力许导数，而表达式

$$\delta T(x_0;h)=T'(x_0)h \quad (7.8)$$

称为算子T在点x_0处关于增量h的弗力许微分。

对照定义3，可以推知如果T弗力许可微，则T也是加可微的，且两种微分相等。但反之则不一定。下述定义表明，弗力许微分相当于多元函数的全微分。

由定义4即知，弗力许可微等价于对任意的$\varepsilon>0$，存在$\eta=\eta(\varepsilon)>0$，当$|t|<\eta$时，

$$\|T(x_0+th)-T(x_0)-A(th)\|<\varepsilon|t|,$$

其中$\|h\|=1$

若记$\Delta x=th$，则上式又等价于

$$\|T(x_0+\Delta x)-T(x_0)-A(\Delta x)\|<\varepsilon\|\Delta x\|$$

其中$\|\Delta x\|<\eta$，因此，弗力许可微的定义又可叙述为：

定义4′ 若存在$A\in B(X\to Y)$，使得

$$T(x_0+h)-T(x_0)-A(h)=\omega(h)$$

其中ω：$X\to Y$，且$\|\omega(h)\|=o(\|h\|)$，则称算子T：$X\to Y$在点$x_0\in X$处是弗力许可微的，有界线性算子A称为算子T在点x_0处的弗力许导数，记为$T'(x_0)=A$。

例5 设三个四元函数：

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\
\eta_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\
\eta_3 &= f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

它将$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^T\in R^4$变为$y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^T\in R^3$，因此，（7.10）式确定了一个由$R^4$到$R^3$的算子F：$y=Fx$。假定函数$f_1,f_2,f_3$都在点$x_0=(\xi_1^\circ,\xi_2^\circ,\xi_3^\circ,\xi_4^\circ)^T\in R^4$处可微（全微分存在），即对于增量$\boldsymbol{h}=(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3,\boldsymbol{h}_4)^T$，在$x_0$处对应的函数增量分别可表为：

$$
\Delta f_1 = \left.\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_2 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial \xi_3}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_3 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial \xi_4}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_4 + \omega_1(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3,\boldsymbol{h}_4)
$$

$$
\Delta f_2 = \left.\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_2 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial \xi_3}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_3 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial \xi_4}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_4 + \omega_2(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3,\boldsymbol{h}_4)
$$

$$
\Delta f_3 = \left.\frac{\partial f_3}{\partial \xi_1}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_1 + \left.\frac{\partial f_3}{\partial \xi_2}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_2 + \left.\frac{\partial f_3}{\partial \xi_3}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_3 + \left.\frac{\partial f_3}{\partial \xi_4}\right|_{x_0} \boldsymbol{h}_4 + \omega_3(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3,\boldsymbol{h}_4)
$$

其中$\omega_i=o(\sqrt{\boldsymbol{h}_1^2+\boldsymbol{h}_2^2+\boldsymbol{h}_3^2+\boldsymbol{h}_4^2})=o(\|\boldsymbol{h}\|)$，把这三个式子写成矩阵形式，便得到

$$
F(x_0+\boldsymbol{h}) - F(x_0) = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} = A\boldsymbol{h} + \omega(\boldsymbol{h}) \tag{7.11}
$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_4}\\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_4}\\[2ex] \dfrac{\partial f_3}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \xi_4}\end{pmatrix}_{x_0}$$

$$\omega(h)=\begin{pmatrix}\omega_1(h_1,h_2,h_3,h_4)\\ \omega_2(h_1,h_2,h_3,h_4)\\ \omega_3(h_1,h_2,h_3,h_4)\end{pmatrix}$$

显然，$\|\omega(h)\|=o(\|h\|)$。因此，$F'(x_0)=A$。

一般地，由m个可微函数

$$\eta_i=f_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad i=1,2,\cdots,m,$$

所确定的算子F：$R^n\to R^m$，其弗力许导数是$m\times n$阶矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_{x_0},\quad i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n。$$

这个矩阵在微积分中称为雅可比（Jacobi）矩阵。

对于弗力许微分，显然有下列性质：

（1）如果算子T在点x_0处弗力许可微，则T在x_0处连续：

$$\lim_{x\to x_0} Tx=Tx_0 \tag{7.12}$$

这可由（7.9）式立即推知。

（2）设T在x_0处弗力许可微，则αT亦然（α为常数），且$(\alpha T)'(x_0)=\alpha T'(x_0)$。

（3）设F：$X\to Y$，G：$X\to Y$，且都在点x_0处弗力许可微，则F＋G亦然，且

$$(F+G)'(x_0)=F'(x_0)+G'(x_0)$$

现在研究复合（乘积）算子的可微性。设X、Y、Z都是巴拿赫空间，F：$X\to Y$，$y=F(x)$在点x_0可微，G：$Z\to X$，$x=G(z)$在点z_0可微，且$G(z_0)=x_0$，则由F和G的连续性可知复合算子$(FG)(z)=F[G(z)]$在点z_0连续。下面证明FG在点z_0可微，且

$$(FG)'(z_0)=F'(x_0)G'(z_0) \tag{7.13}$$

事实上，根据弗力许微分的定义，有

$$F(x)=F(x_0)+A(x-x_0)+\omega(x-x_0) \tag{7.14}$$

$$G(z)=G(z_0)+B(z-z_0)+\delta(z-z_0) \tag{7.15}$$

令$\omega(\theta)=\theta$，则ω在θ的邻域内连续，考虑到$x=G(z)$，将（7.15）式代入（7.14），得

$$F[G(z)]-F[G(z_0)]=AB(z-z_0)+\varepsilon(z-z_0) \tag{7.16}$$

其中$\varepsilon(z-z_0)=A[\delta(z-z_0)]+\omega[B(z-z_0)+\delta(z-z_0)]$

而 $\|A[\delta(z-z_0)]\|\leqslant\|A\|\,\|\delta(z-z_0)\|$

故 $\|A[\delta(z-z_0)]\|=o(\|z-z_0\|)$

同时 $\omega[B(z-z_0)+\delta(z-z_0)]$

$=o(\|B(z-z_0)+\delta(z-z_0)\|)$

$=o(\|z-z_0\|)$

因此，式（7.16）表明

$$(FG)'(z_0)=AB$$

此即（7.13）式。

例6 设算子F：$R^n\to R^m$,则如例5那样,关系式$y=Fx$等价于

$$\eta_i=f_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\ i=1,2,\cdots,m$$

再设算子G：$R^k\to R^n$，则关系式$x=Gz$等价于

$$\xi_j=g_j(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_k),j=1,2,\cdots,n$$

设点$x_0=(\xi_1^0,\xi_2^0,\cdots,\xi_n^0)^T\in R^n$,$z_0=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_k)^T$

$\in R^k$，且满足$x_0=G_{z_0}$。假定每一个f_i在点x_0可微（即算子G在z_0处弗力许可微），则乘积算子FG：$R^k\to R^m$，$y=(FG)(z)$在点z_0处弗力许可微，且根据(7.13)式及例5的结果，有

$$(FG)'(z_0)=F'(x_0)G'(z_0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_{x_0}\left(\frac{\partial g_j}{\partial \zeta_l}\right)_{z_0}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial \xi_j}\ \frac{\partial g_j(z_0)}{\partial \zeta_l}\right)$$

$$i=1,\ 2,\cdots,m,\ l=1,2,\cdots,k,$$

这是一个$m\times k$阶矩阵。

§7·2 泛函的极值

用加脱微分和弗力许微分的概念，去求线性空间中泛函的极值，是比较简单的。这种方法很自然地导出了变分学的基本原理。其实，抽象的微分概念最早就是来源于变分学。在这一节我们将把大家熟知的普通微积分中一元函数极小化的方法，推广到基于更一般微分的类似方法。用这种方法，可以得到和局部极值的经典必要条件类似的结果。在后面一节，还得到和条件极值的拉格朗日方法类似的结果。

1．极值的必要条件

定义1 设X为巴拿赫空间，泛函f在点$x_0\in X$的邻域B内有定义，如果存在x_0的一个邻域$B_1\subset B$，使得对所有的$x\in B_1$均有

$$f(x_0)\leqslant(x) \tag{7·16}$$

则x_0称为f的局部极小点，$f(x_0)$称为f局部极小值，类似地可以定义局部极大值。

如果(7·16)式中的等号去掉，则相应地称为“严格”极值。下述定理与微积分中的有关定理完全类似，它给出了泛函取得极值的必要条件。

定理1 设泛函f在x_0达到极值，且在x_0处具有一阶变分$\delta f(x_0;h)$，则$\delta f(x_0;h)=0$。

〔证明〕 对任意的$h\in X$，考察函数$\varphi(t)=f(x_0+th)$，因为它在$t=0$处达到极值，故

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\delta f(x_0;h)=0$$

定理得证。

推论1 在定理1的条件下，假定泛函f在x_0处可微（在加脱或弗力许意义下），则$f'(x_0)=0$。这时称x_0是f的驻点。

关于极值的充分条件需要由高阶微分给出，就不予以介绍了。但是，如同在微积分中那样，在实用中往往都利用这个必要条件来求泛函的极值，它既简单，又比较可靠，只要实际问题确定存在极值。

2.欧拉—拉格朗日方程

现在，我们利用上面的结果来解一个经典的变分学问题，即寻求在区间［a,b］上二阶连续可微的函数$x(t)$，使得泛函

$$J(x)=\int_a^b g(x(t),\ \dot{x}(t),\ t)\mathrm{d}t \tag{7·17}$$

达到极值，其中g关于x，$\dot{x}$，t具有二阶连续偏导数。还假定未知函数在端点a和b的数值是已知的：

$$x(a)=\alpha,\ x(b)=\beta$$

于是，J是定义在空间C^2 $[a,b]$ 的一个子集$D(J)=\{x(t)\in C^2[a,b]; x(a)=\alpha, x(b)=\beta\}$上的泛函。根据定理1及§7.1例3式（7.5），极值点$x(t)$应满足

$$\int_a^b \left(g'_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g'_{\dot{x}}\right)h\mathrm{d}t+g'_{\dot{x}}h\Big|_a^b=0$$

为了使$x(t)+h(t)\in D(J)$，应该令$h(a)=h(b)=0$，因此

$$\int_a^b \left(g_x'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g'_{\dot{x}}\right)h\mathrm{d}t=0$$

对满足$h(a)=h(b)=0$的任一$h(t)\in C^2[a、b]$成立。由微积分知识可知，这时必有

$$g_x'(x,\dot{x},t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g'_{\dot{x}}(x,\dot{x},t)=0 \qquad (7\cdot18)$$

这就是所求的极值点$x(t)$应满足的方程，它称为欧拉-拉格朗日方程。

利用复合函数求导法，方程(7·18)可改写为

$$g_x'-g''_{\dot{x}x}\dot{x}-g''_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}-g''_{\dot{x}t}=0 \qquad (7\cdot19)$$

有一种特殊情形，即g中不显含t：$g(x,\dot{x})$，这时，方程(7·19)成为

$$g_x'-g''_{\dot{x}x}\dot{x}-g''_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}=0 \qquad (7\cdot20)$$

又由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g-g'_{\dot{x}}\dot{x})=(g'_x-g''_{\dot{x}x}\dot{x}-g''_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x})\dot{x}$$

故方程（7·5）成为下列简洁的形式：

$$g-\dot{x}g'_{\dot{x}}=D \qquad (7\cdot 21)$$

其中D为任意常数。

例1（捷线问题） 设A，B为三维空间R^3中的两个固定点，在所有连接A，B两点的曲线中找出一条曲线l，使得初速为零的质点m在重力作用下自A沿曲线l运动到B所用的时间最少。

显然，l一定是一条平面曲线。如图7-1那样建立坐标系，设曲线的方程为

$y=y(x)$，$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$

则质点运动速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

其中S表示弧长。于是$\mathrm{d}t=\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x/v$，质点$m$从点$A$运动到点$B$所用的时间为

$$J(y)=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{v}\mathrm{d}x$$

根据牛顿第二定律可知$v=\sqrt{2gy}$，g为重力加速度，因此，我们的问题就成为在条件$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$下寻求泛函

$$J(y)=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x$$

的极小点$y(x)$。

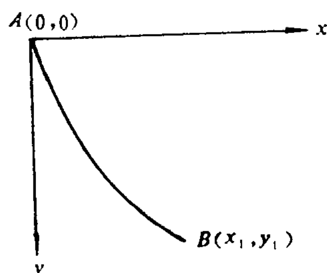


图 7-1

根据方程(7·21)，未知曲线$y(t)$应满足方程

$$\frac{1}{\sqrt{\dot{y}(1+y^2)}} = D$$

即

$$y(1+\dot{y}^2) = D_1$$

引入参数φ使得 $\dot{y} = \mathrm{ctg}\varphi$，则

$$y = \frac{D_1}{1+\mathrm{ctg}^2\varphi} = D_1 \sin^2\varphi = \frac{D_1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\dot{y}} = \frac{2D_1 \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{ctg}\varphi} = D_1(1-\cos 2\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

积分后得

$$x = D_1(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}) + D_2 = \frac{D_1}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + D_2$$

由 $y(0)=0$知$D_2=0$，再令$\theta = 2\varphi$，$R = \frac{D_1}{2}$，便得

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

这正是半径为R的圆滚动时的摆线方程。

§7·3 具有等式约束的极值

在许多极值或最优化问题中，往往要求极值点或最优解满足某些约束条件。例如上节求泛函（7·2)的极值时要求“端点固定”就是一种简单的约束条件。约束条件可以有各种各样的类型，例如可用等式表示，也可用不等式表示。本节仅考虑等式约束，先讨论有限维的情形。

1.有限维情形

考察泛函$f(x)$在等式条件

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) = 0 \\ &\varphi_2(x) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_n(x) = 0 \end{aligned} \tag{7·22}$$

下的极值。

式(7·22)的n个方程确定了线性赋范空间X中的一个集合Ω,极值点x_0就应在Ω中寻求。为了便于讨论,本节恒假定泛函φ_i与f在Ω中连续可微。

定义1 如果$x_0 \in X$满足式（7·22),且n个线性泛函$\varphi_1'(x_0)$，$\varphi_2'(x_0)$，$\cdots\varphi_n'(x_0)$线性无关，则称x_0是约束条件(7·22)下的正则点。

以下我们逐步给出有约束条件时泛函取得局部极值的必要条件。

定理1 设$x_0 \in X$是泛函f在约束条件（7·22）下的极

值点，且x_0是这些约束下的正则点，则对于所有满足$\varphi_i'(x_0)h=0$的$h(i=1,2,\cdots,n)$，均有

$$f'(x_0)h=0 \tag{7.23}$$

〔证明〕 由于有界线性泛函组$\varphi_1'(x_0),\varphi_2'(x_0),\cdots,\varphi_n'(x_0)$线性无关，故存在元素组$h_1,h_2,\cdots,h_n\in X$，使下列$n\times n$矩阵为单位矩阵：

$$M=(\varphi_i'(x_0)h_j)=(\delta_{ij})=I$$

显然$h_1,h_2,\cdots,h_n$是线性无关的。设$h\in X$满足定理条件，现在引入$n+1$个实值变量$\varepsilon,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$考察$n$个方程

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_0+\varepsilon h+\alpha_1h_1+\cdots+\alpha_nh_n)=0\\&\varphi_1(x_0+\varepsilon h+\alpha_1h_1+\cdots+\alpha_nh_n)=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\varphi_n(x_0+\varepsilon h+\alpha_1h_1+\cdots+\alpha_nh_n)=0\end{aligned} \tag{7·24}$$

此方程组关于变量α的雅可比行列式（在$\varepsilon=0$，$\alpha_i=0$处）正好等于$|M|=1\neq0$，于是根据隐函数存在定理，必存在唯一的一组（n个）定义在$\varepsilon=0$的某邻域内的函数$\alpha_i(\varepsilon)$，它满足方程组(7.24)，且$\alpha_i(0)=0$，若记$h_0(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\varepsilon)h_j$，则

$$h_0(0)=0 \tag{7·25}$$

并记分量为$\alpha_i(\varepsilon)$的n维矢量$\alpha(\varepsilon)$。这样，对每一个i有

$$\begin{aligned}0&=\varphi_i(x_0+\varepsilon h+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\varepsilon)h_j=\varphi_i(x_0+\varepsilon h\\&\quad+h_0(\varepsilon))\\&=\varphi_i(x_0)+\varphi_i'(x_0)(\varepsilon h)+\varphi_i'(x_0)h_0(\varepsilon)+0(\varepsilon)+\end{aligned}$$

$o(\|h_0(\varepsilon)\|)$

$$= \varphi_i'(x_0)h_0(\varepsilon) + o(\varepsilon) + o(\|h_0(\varepsilon)\|)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\varepsilon)\varphi_i'(x_0)h_j + o(\varepsilon) + o(\|h_0(\varepsilon)\|)$$

即 $\alpha_i(\varepsilon) + o(\varepsilon) + o(\|h_0(\varepsilon)\|) = 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$。将这$n$个式子写成矢量形式并取范数得到

$$\|\alpha(\varepsilon)\| + o(\varepsilon) + o(\|h_0(\varepsilon)\|) = 0 \qquad (7\cdot26)$$

因为$h_1, h_2, \cdots, h_n$线性无关,所以存在常数$d_2 > d_1 > 0$使得

$$d_1\|h_0(\varepsilon)\| \leqslant \|\alpha(\varepsilon)\| \leqslant d_2\|h_0(\varepsilon)\|$$

于是$\|h_0(\varepsilon)\|$与$\|\alpha(\varepsilon)\|$是同阶无穷小,根据(7·26)即知

$$\|h_0(\varepsilon)\| = o(\varepsilon) \qquad (7.27)$$

由本定理假设条件及式(7.24)，(7.25)不难看出，函数

$$\psi(\varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon h + h_0(\varepsilon))$$

在$\varepsilon = 0$处达到极值，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} f(x_0 + \varepsilon h + h_0(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

再由关系式(7.27)即得$\delta f(x_0; h) = 0$。〔证毕〕

利用定理1可以导出拉格朗日乘数法。

定理2 如果x_0是泛函f在约束条件

$$\varphi_i(x) = 0 \ (i = 1, , \cdots, n)$$

下的极值点，且x_0是这些约束条件下的正则点，则存在n个常数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$使得泛函

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i(x) \qquad (7\cdot28)$$

以x_0为驻点，即

$$f'(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi'(x_0)=0 \qquad (7.29)$$

例1（等周问题）　在连接两定点A及B而长度为l的光滑曲线中，确定这样一条曲线，使得它和直线段AB一起围成最大的面积。

以通过A和B两点的直线作为x轴，且设x_0和x_1分别是A和B的横坐标。不妨认为所求曲线在区间$[x_0, x_1]$内是x的单值函数。于是问题便归结为求泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} y(x)\,\mathrm{d}x$$

在约束条件

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x=l$$

下的极大值。

根据定理2，极大点$\tilde{y}(x)$是泛函

$$L(y,\lambda)=\int_{x_0}^{x_1}[y+\lambda\sqrt{1+y^2}]\mathrm{d}x-\lambda l$$

的驻点，代入欧拉-拉格朗日方程，得到y所满足的方程：

$$y+\lambda\sqrt{1+\dot{y}^2}-\frac{\lambda\dot{y}^2}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=D$$

从而

$$\dot{y}=\frac{\sqrt{\lambda^2-(y-D)^2}}{y-D}$$

或

$$\frac{(y-D)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{\lambda^2-(y-D)^2}}=\mathrm{d}x$$

$$(x-C)^2+(y-D)^2=\lambda^2$$

所以，等周问题的解是一条通过A、B两点且长度为l的圆弧。

定理2所阐明的是(7·22)式所示的有限维约束下的条件极值。下面我们进一步讨论无限维约束的情形。

2. 无限维情形

这时，把条件(7·22)拓广为

$$\Phi(x)=\theta \tag{7·30}$$

的形式，其中算子Φ：$X\to Z$，Z是某个线性赋范空间。当$Z=R^n$时，(7·30)式便成(7·22)式那样的形式。

定义2 设X，Z为巴拿赫空间，$x_0\in X$，算子Φ：$X\to Z$在x_0的邻域$B(x_0)$中有定义且连续可微（弗力许意义下）。设x_0满足条件(7·30)，且有界线性算子是到上的，则称x_0是算子Φ的正则点。

为了获得在约束条件(7·30)下的拉格朗日乘数法，需要下述著名的反函数定理。这个定理的证明较繁，这里从略。

定理3（反函数定里） 设x_0是算子F：$X\to Y$的正则点，则存在关于点$y_0=F(x_0)$的邻域$B(y_0)$及常数α，使得对于每一个$y\in B(y_0)$，方程$F(x)=y$有解，其解x满足$\|x-x_0\|\leqslant\alpha\|y-y_0\|$。

下面，我们来推导泛函f：$X\to R$在约束条件(7·31)下达到（局部）极值的必要条件。

定理4 设泛函f在$x_0\in X$的邻域内连续可微，x_0是Φ的正则点。如果x_0是泛函f在约束条件$\Phi(x)=0$下的极值点，则对所有满足$\Phi'(x_0)h=0$的$h\in X$，均有

$$f'(x_0)h=0 \tag{7·31}$$

〔证明〕 为确定起见，设x_0是极小点。考察算子F：X

$\to R\times Z$，其定义为$F(x)=(f(x),\ \Phi(x))$。假如定理不成立，即有$h\in X$满足$\Phi'(x_0)h=\theta$但$f'(x_0)h\neq 0$，显然这时$F'(x_0)=(f'(x_0),\ \Phi'(x_0))\in B(X\to R\times Z)$是到上的。这是因为根据定理假设知$\Phi'(x_0)$是到上的，而非零有界线性泛函$f'(x_0)$也是到上的，于是根据反函数定理，当正数$\delta$充分小时，对于位于点$(f(x_0),\ \theta)$的邻域内的点$(f(x_0)-\delta,\ \theta)$，方程$F(x)=(f(x_0)-\delta,\ \theta)$有解$x$，且$x$满足$\|x-x_0\|\leqslant\alpha\delta$，由此可知，对任意的$\varepsilon>0$，当$\delta$充分小时$\|x-x_0\|<\varepsilon$。换句话说，对任意的$\varepsilon>0$，存在$x\in X$及$\delta>0$，使得$\|x-x_0\|<\varepsilon$且$F(x)=(f(x_0)-\delta,\theta)$，这表明$x_0$不是$f$在约束条件$\Phi(x)=\theta$下的极小点。 〔证毕〕

定理5（拉格朗日乘数法） 设泛函f在$x_0\in X$的邻域内连续可微，x_0是Φ的正则点，如果x_0是泛函f在约束条件$\Phi(x)=\theta$下的极值点，则存在有界线性泛函$z_0^*\in Z^*$，使得拉格朗日函数

$$L(x)=f(x)+z_0^*\Phi(x) \qquad (7\cdot32)$$

以x_0为驻点，即

$$f'(x_0)+z_0^*\Phi'(x_0)=\theta \qquad (7\cdot33)$$

式(7·33)中左端的第二项应为两个有界线性算子的复合（积乘）。显然，当$Z=R^n$时式(7·33)成为式(7·29)。

定理证明从略。

作为定理的应用，我们再来考察变分学中有约束极值问题。

例2 设$C_n^1[a,b]$为在区间$[a,b]$上具有连续

导数的n维矢量函数空间。考察定义在$C_n^1[a,b]$中的泛函

$$J(x)=\int_a^b g(x,\dot{x},t)\,\mathrm{d}t \tag{7·34}$$

在下列条件下的极值：$x(t)$具有固定端点

$$x(a)=\alpha,\quad x(b)=\beta \tag{7·35}$$

且满足约束条件

$$\varphi(x,t)=0 \tag{7·36}$$

g和φ都是实值函数，并且有二阶连续偏导数。因为具有固定端点，所以我们限于考虑在a,b处取零值的增量$h(t)\in C_n^1[a,b]$，泛函$J(x)$的弗力许微分为

$$\delta J(x;h)=\int_a^b [g_x'(x,\dot{x},t)h(t)+g_{\dot{x}}'(x,\dot{x},t)\dot{h}(t)]\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b \langle(g_x'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{\dot{x}}'),\ h\rangle\,\mathrm{d}t \tag{7·37}$$

函数φ可视为由$X=\{x(t)\in C_n^1[a,b];\ x(a)=x(b)=0\}$到$Z=\{z(t)\in C[a,b];z(a)=z(b)=0\}$的算子$\Phi$。其弗力许微分为

$$\delta\Phi(x;h)=\langle\varphi_x',\ h\rangle \tag{7·38}$$

我们假定当$t\in[a,b]$时，沿着极小值点$x(t)$所有偏导数φ_{x_i}'不同时为零。这时在极值点$x(t)$处式(7·38)中的弗力许导数$\Phi'(x)\in B(X\to Y)$是到上的。这是因为对任意的$z(t)\in Z$，选取

$$h(t)=\frac{(\varphi_x')^{\mathrm{T}}z(t)}{(\varphi_x')(\varphi_x')^{\mathrm{T}}}$$

则$h(t)\in X$，且满足$\Phi'(x)h=z(t)$。（式中(φ_x')是n维矢量，$(\varphi_x)^{\mathrm{T}}$是它的转置的n维列矢量）。于是由定理5，即存在“拉格朗日乘数”z^*，$z^*\in Z^*$，一般地表示为

$$\langle z,z^*\rangle=\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}z^*(t)$$

其中$z^*(t)\in V_0[a、b]$。在通常情况下，上式可写为

$$\langle z,z^*\rangle=\int_a^b z(t)\lambda(t)\,\mathrm{d}t \qquad (7.39)$$

因此必要条件变为：

$$g_x'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g'_{\dot{x}}+\lambda(t)\varphi_x'=0 \qquad (7.40)$$

这就是式（7.34）在约束条件（7.36）下的极值点所满足的方程。

附录 I　实数与极限論

泛函分析的理论，几乎都建立在完备空间的基础上，而一些抽象空间的完备性问题，又是实数的完备性（连续性）的拓广和发展，为此，我们不得不介绍一下实数的理论。

§I·1　有理数

一切形如$\frac{n}{m}$的数称为有理数（此处m是正整数，n是整数）。或者说：一切循环小数（包括有限小数），如3.81313…（记为$3.8\dot{1}\dot{3}$），0.560783783…（记为$0.560\dot{7}8\dot{3}$），等等称为有理数。

需要注意的是，以上两种说法是完全一致的，因为对任一个$\frac{n}{m}$，总可表示为$\frac{n}{m}=p+\frac{p_1}{m}$，其中$p$与$p_1$都是整数，$0\leqslant p_1<m$，$\frac{p_1}{m}=0.r_1r_2\cdots$（或有限，或无限循环，无其它可能。反之，任何一个循环小数，总可化成一个确定的$\frac{n}{m}$。

今后我们用Q记全体有理数组成的集合，有理数具有下列性质：

1°有序性

对于任何两个有理数a与b，必定成立下列三个关系中的一个：

$$a=b, a<b, a>b$$

并且若$a<b$且$b<c$，则$a<c$。

2°稠密性

对于任何两个有理数a与b之间必定存在其它的有理数，且具有无限多个。例如$a<b$，则对于$r=\frac{a+b}{2}$有$a<r<b$。于是又可证明在a与r以及r与b之间都存在有理数等等。

全体有理数可用直线上的点来表示。这是这样做的：在直线上任取一点，作为数0，这点称为零点或原点。在原点右方任取一点，作为数1的点。这样就决定了长度的单位，就是以0与1为端点的线段。用单位长度从原点向右量n次，得到的点就是数n，而从原点向左量n次所得到的点就是$-n$。这样就得到所有的整数点，要得到分数$\frac{p}{q}$的点，可以把单位长度分成q个等分，然后取其中的一等分从原点向右量p次，就得到$\frac{p}{q}$的点，若从原点向左量，就得到$-\frac{p}{q}$的点，这样就在直线上得到了有理点集，其中任一点与原点的距离等于单位长度的有理数倍，这点就表示该有理数。

可以注意的是，为了表示有理数并没有用尽直线上所有的点，就是说，并不是直线上所有的点都是有理点。

要证明这个事实，可以做一个边为单位长的正方形，而把正方形的对角线从原点向右放置在直线上去。这样就得到一点α。兹证明α不是有理点，事实上，如果设α是有理点，即

α与原点的距离等于是一有理数r。但因这距离等于边长为1的正方形的对角线长，故应有$r^2=2$。

因此，假设α是有理点就等于假设存在一个有理数，其平方等于2。现在证明，由这种假设可导出矛盾。设$r^2=2$，其中r是有理数，即可写成既约分数$r=\frac{p}{q}$的形式。由此$(\frac{p}{q})^2=2$，而$p^2=2q^2$，故p^2是偶数。但这样一来p就必须是偶数，因为如果p不是偶数，则p^2亦不能是偶数。于是$p=2p'$，由$(2q')^2=2q^2$得$2p'^2=q^2$，由此知q^2以及q亦为偶数，就是$q=2q'$。这样，分数$\frac{p}{q}=\frac{2p'}{2q'}$将是可约分的，但我们原来假设$r=\frac{p}{q}$是既约分数。所得到的矛盾就证明了并不存在平方等于2的有理数，同时也证明了α不是有理点。

这样，要想给直线上每一点以一个对应的数来表示这点的距离，有理数Q是不够用的。此即有理数的不完备性，也称不连续性，形象地说，有理数点虽然稠密，但还有空隙，好比用快刀切直线，可能切至空处一样。为使建立数集与直线点集之间的一一对应成为可能，必须要给数集添加新的元素，就是必须拓广数的概念，而引进所谓无理数。

§ I·2 实数

在本节里我们以有理数为基础建立实数的理论。尽管人们早就在利用实数——有理数或无理数，然而什么是无理数？这个问题直到十九世纪后半叶才得到严格解决。这方面的理论很多，方法也各有优缺，在一些数学分析的教科书或参考书上分别的作了详细的介绍，不在这里一一的叙述了。

本节只是介绍其中一种定义实数的方法。主要还是将在下一节给出反映实数连续性（完备性）的一系列基本定理。

定义1 设$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$都是有理数，假如对任意的正有理数$\varepsilon$存在自然数$N$，使得当$m, n > N$时，不等式

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad (\text{I} \cdot 1)$$

成立，就称$\{a_n\}$是基本有理数列。

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个基本有理数列，若对任一正有理数ε，有自然数N，使得当$n > N$时不等式

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \qquad (\text{I} \cdot 2)$$

成立，就称基本有理数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$相等，记做

$$\{a_n\} = \{b_n\}$$

我们称基本有理数列是一个实数。规定相等的基本有理数列是同一个实数。

引理1 基本有理数列$\{a_n\}$是有界的，即有一个有理数M，使得对一切自然数n，成立着

$$|a_n| \leqslant M$$

〔证明〕因为$\{a_n\}$是基本有理数列，所以对$\varepsilon = 1$有自然数N，使得当$n \geqslant N$时（I·1）成立，即

$$|a_n - a_N| < 1$$

从而当$n \geqslant N$时有

$$|a_n| < |a_N| + 1$$

令$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N| + 1\}$，那末$M$是有理数，而且对一切自然数$n$都有

$$|a_n| \leqslant M$$

〔证毕〕

引理2 （1）设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是两个基本有理数列，那末$\{a_n + b_n\}$，$\{a_n b_n\}$都是基本有理数列。

（2）如果$\{a_n\}$，$\{a_n'\}$，$\{b_n\}$和$\{b_n'\}$都是基

本有理数列，而且

$$\{a_n\} = \{a_n'\}, \quad \{b_n\} = \{b_n'\}$$

必有$\{a_n + b_n\} = \{a_n' + b_n'\}$，$\{a_n b_n\} = \{a_n' b_n'\}$。

〔证明〕 由引理1，有正有理数A，使得对一切自然数n成立着

$$|a_n| < A, \quad |a_n'| < A, \quad |b_n| < A, \quad |b_n'| < A$$

设ε是一正有理数，有自然数N使得不等式

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2A}, \quad |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

$$|a_n - a_n'| < \frac{\varepsilon}{2A}, \quad |b_n - b_n'| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

对一切n，$m > N$成立。那末当n，$m > N$时，

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_m b_m| &= |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)| \\ &\leqslant A|b_n - b_m| + A|a_n - a_m| < \varepsilon \end{aligned}$$

所以$\{a_n b_n\}$是基本有理数列。又当$n > N$时，

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_n' b_n'| &= |a_n(b_n - b_n') + b_n'(a_n - a_n')| \\ &\leqslant A|b_n - b_n'| + A|a_n - a_n'| < \varepsilon \end{aligned}$$

所以$\{a_n b_n\} = \{a_n' b_n'\}$。

其余可以类似地证明。

利用引理2可以规定实数的运算如下：

定义2 设$a = \{a_n\}$，$b = \{b_n\}$是两个实数，称实数$\{a_n + b_n\}$为"a加b的和"，记做$a + b$，称$\{a_n b_n\}$为"a乘b的积"，记做$a \cdot b$或ab。

引理2说明了$a + b$，$a \cdot b$确是实数，而且有确定的意义，就是说，如果$a = a'$，$b = b'$，那末必然$a + b = a' + b'$，

$a \cdot b = a' \cdot b'$。

我们简记$a + (- b) = a - b$，称为a减b的差。容易明白：$0 - a = - a$。

当$b \neq 0$时，简记$a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$（或$a / b$），称为$a$除以$b$的商，或称$a$与$b$的比值，也可记作$a:b$。

容易看出，如果$a = \{ a_n \}$，$b = \{ a_n \}$，那末$a - b = \{ a_n - b_n \}$；当$b \neq 0$，并且一切b_n全不为0时，$a / b = \{ a_n / b_n \}$。

上面规定好了实数的运算，下面来规定实数的顺序。

定义3 设$a = \{ a_n \}$，$b = \{ b_n \}$是两个实数，假如有正有理数δ和自然数N，使得当$n > N$时，

$$a_n - b_n > \delta$$

那末称b小于a，记作$b < a$；或称a大于b，记作$a > b$。

容易证明，若基本有理数列$\{ a_n \} = \{ a_n' \}$，$\{ b_n \} = \{ b_n' \}$，那末当$\{ a_n \} < \{ b_n \}$时，$\{ a_n' \} < \{ b_n' \}$，所以$a < b$有确定的意义。

定理1 设a，b两个实数，那末三个关系

$$a = b, a < b, a > b$$

必有一个成立，而且只有一个成立。

证明从略

此外还可以证明，实数的顺序与代数运算之间有下面的基本关系：

定理2 设a, b, c是三个实数，如果$a < b$，那末$a + c < b + c$，如果又有$a > 0$，那末$a \cdot c < b \cdot c$。

特别地$a > 0$，与$- a < 0$是等价。

定义4 大于0的实数称为正数，小于0的实数称为负

数。

设α是一实数，记$|\alpha|$为如下的实数：当$a\geqslant 0$时，$|\alpha|=\alpha$，当$\alpha<0$时，$|a|=-a$，称$|a|$为实数a绝对值。

容易证明：如果$\{a_n\}$是基本有理数列,$a=\{a_n\}$，那末$|a|=\{|a_n|\}$。因此，a的绝对值$|a|$有确定的意义。

由定理2易知

定理3 设a和b是实数，那末$|ab|=|a|\cdot|b|$，并且

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

把有理数和一部分实数等同起来，这样一来，有理数就是实数的一部分了。

最后我们来证明有理数在实数中是处处稠密的，就是要证明任何两个实数之间必存在有理数。

定理4 设a，b是两个实数；$a<b$，那末必有有理数$\tilde{c}$适合

$$a<\tilde{c}<b$$

〔证明〕 设$a=\{a_n\}$,$b=\{b_n\}$,由于$\{a_n\}<\{b_n\}$必有正有理数δ和自然数N，使得当$n\geqslant N$时有

$$b_n-a_n>\delta$$

又因为$\{a_n\}$及$\{b_n\}$是基本数列，必有$N_1\geqslant N$，使得当$m,n\geqslant N_1$,时，

$$|a_n-a_m|<\frac{\delta}{4},\quad |b_n-b_m|<\frac{\delta}{4}$$

取 $b_{N_1}-\dfrac{\delta}{2}=\tilde{c}$，这是有理数，并且$m\geqslant N$时有

$$b_m-\tilde{c}=b_m-b_N+\frac{\delta}{2}>-\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{4}>0$$

所以$\{b_m\}>\{\tilde{c}\}$；又当$m\geq N_1$时，

$$\tilde{c}-a_m=b_{N_1}-a_{N_1}+(a_{N_1}-a_m)-\frac{\delta}{2}>\delta-\frac{\delta}{4}-\frac{\delta}{2}$$

$$=\frac{\delta}{4}>0$$

即$\{\tilde{c}\}>\{a_m\}$。 〔证毕〕

§ I·3　关于实数列的极限理论

现在利用上面建立的实数理论，来证明极限理论中的几个基本定理，考虑到这些基本定理的重要意义，虽然有些定理在第二章里已经作了介绍，但是我们还是把它录下，只是把证明略去。

定义1　设$\{a_n\}$是一实数列。如果有实数a适合如下条件：对于任何正数ε，存在自然数N，使得当$n\geq N$时成立

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

那末称实数列$\{a_n\}$收敛于极限a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

定理1　数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对于任一正数ε，存在自然数N，使得当$n,m\geq N$时，

$$|a_n-a_m|<\varepsilon \qquad (1.3)$$

这就是著名的哥西（Cauchy）收敛原理。

证明见§2·5定理。

定理2　设$\{a_n\}$是单调增加的实数列：

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \qquad (\text{I}\cdot 4)$$

而且$\{a_n\}$是有上界的，那末$\{a_n\}$必收敛。

〔证明〕 用反证法。假设$\{a_n\}$不收敛。那末必存在某个正数ε_0，使得对于任意给定的自然数N，不等式

$$|a_n - a_m| < \varepsilon_0$$

不能对一切大于或等于N的n，m都成立。于是当$N=1$时，便有自然数n_1，$m_1 \geqslant 1$使得

$$|a_{m_1} - a_{n_1}| \geqslant \varepsilon_0$$

不妨假设$n_1 > m_1$；取$N = n_1 + 1$，必有n_2，$m_2 \geqslant n_1 + 1$使得

$$|a_{n_2} - a_{m_2}| \geqslant \varepsilon_0$$

不妨设$n_2 > m_2$。这样继续下去，可以得到自然数列

$$m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots < m_k < n_k < \cdots$$

使得$|a_{n_k} - a_{m_k}| \geqslant \varepsilon_0$。但由于$\{a_n\}$是单调增加数列，有$a_{n_k} > a_{m_k}$，所以$|a_{n_k} - a_{m_k}| = a_{n_k} - a_{n_k} \geqslant \varepsilon_0$。从而得到

$$a_{n_k} \geqslant a_{m_k} + \varepsilon_0 \geqslant a_{n_{k-1}} + \varepsilon_0 \geqslant a_{n_{k-1}} + 2\varepsilon_0 \geqslant \cdots \geqslant a_{n_1} + k\varepsilon_0$$

对于任意给定的正数a，取k充分大，可使得$a_{n_1} + k\varepsilon_0 > a$，这样一来，得到

$$a_{n_k} > a$$

这和$\{a_n\}$是有上界的假设相矛盾。所以$\{a_n\}$收敛。

〔证毕〕

定理3 设$I_n = [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$是一列单调下降的闭区间：

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

并且它们的长度趋于0：$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，那末必有唯一的实数$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$，而且

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

〔证明〕 容易看出，各区间的端点之间有着顺序关系：

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \qquad (\text{I}\cdot 5)$$

所以$\{a_n\}$是一列单调增加且有上界的数列，由定理2，必存在极限$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n$。又由$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，立即得知$\{b_n\}$也收敛并且$\xi = \lim_{n\to\infty} b_n$。由(1·5)知道$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$对一切自然数$n$成立。所以$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$。显然$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$只含有$\xi$这一个点。 〔证毕〕

这就是有名的康托(Cantor)区间套定理。

用区间套定理可以证明下面诸定理。

定理4 直线上不空的有界点集必存在唯一的上(下)确界。

证明参看§2·6定理。

定理5 (波尔察诺-维尔斯德拉斯)任何有界数列必有收敛子数列。

〔证明〕 用区间套定理证明，读者可与§2.1该定理的证明方法作一比较。

设数列$\{x_n\}$是有界的，即有正数N，使得$\{x_n\}\subset[-N, N]$。于是在两个区间$[-N, 0]$，$[0, N]$中必有一个含有$\{x_n\}$中的无限多项，记这个区间为I_1（如果两个区间同时含有$\{x_n\}$中无限多项，那末任意取一个作为I_1）。譬如说$I_1=[0, N]$，将I_1等分为二：

$$[0, \frac{N}{2}], \quad [\frac{N}{2}, N]$$

选其中含有$\{x_n\}$中无限多项的一个，记为I_2。依此继续下去，得到一列闭区间$I_1, I_2, \cdots, I_m, \cdots$，其中每个$I_m=[a_m, b_m]$含有$\{x_n\}$中无限项，它们适合

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_m\supset\cdots$$

而且其长度$\frac{N}{2^{m-1}}$趋于0（$m\to\infty$）。由区间套定理，有$\xi\in\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$,

$$\xi=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$$

因为每个I_m中含有$\{x_n\}$中无限多项，取$x_{n_1}\in I_1$，再取$x_{n_2}\in I_2$且$n_2>n_1$，依此下去，那末有$\{x_n\}$的子数列$\{x_{n_k}\}$适合$x_{n_k}\in I_k$

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k \qquad k=1, 2, \cdots$$

所以$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$。〔证毕〕

定义2 设D是直线上的点集，B是一族开区间。如果

$$\bigcup_{(\alpha,\beta)\in B}(\alpha, \beta)\supset D$$

就说区间族B覆盖D。

定理6　海涅-鲍莱尔　设B是一族开区间，覆盖着有界闭集F。那末必可以从B中选取有限个开区间来覆盖F。

证明参看§2·7定理。

我们还可以拓广实数列收敛的意义，允许它收敛到$\pm\infty$。

拓广了极限的概念后，可以解除上面一些定理中关于数列有界或有上界或有下界的限制。

附录Ⅱ 連续函数和函数列一致收斂

在这里将要介绍函数f；$A(\subset R)\to R$的连续性，紧集上连续函数的一系列重要性质，它们是高等数学中不曾证明过的而在应用中理论上都十分重要的有界闭区间上连续函数性质的推广。还要简单地介绍一致连续与函数列一致收敛的概念。

§Ⅱ·1 連续函数

首先回顾一下函数极限的定义：

设f：$A\to R$，$x_0\in\overline{A}$，如果对于任意给定的正数ε，存在着正数$\delta>0$，使得当$x\in A$，$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

则称$f(x)$在x_0点处有极限l，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

注意的是，这里的集A可能不再是简单的区间，可以是R中较一般的点集。

定义1 设f：$A\to R$，$x_0\in A$，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称f在点x_0是连续的。如果f在A的每一点连续，就称f是连续函数。或称f在A上是连续的。

等价地有连续的$\varepsilon-\delta$形式的定义：

如果对于任意给的正数ε，存在着$\delta>0$，使得当$x_0\in A$，$|x-x_0|<\delta$时都有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

则称f在x_0点连续。类似地定义连续函数。

如果用邻域来定义，记

$$u_\varepsilon(f(x_0))=\{y\in R \mid |y-f(x_0)|<\varepsilon\}$$

这表示R中点$f(x_0)$的ε—邻域。那末显然有

f在$x_0\in A$连续的充要条件是：对于任意给的正数ε，存在着正数δ，使得

$$f(A\cap u_\delta(x_0))\subset u_\varepsilon(f(x_0))$$

也即
$$A\cap u_\delta(x_0)\subset f^{-1}(u_\varepsilon(f(x_0)))$$

于是我们可以用邻域形式来定义连续函数了。

定义1′ 设f：$A\to R$，$x_0\in A$，如果R中$f(x_0)$的任一ε-邻域的原象$f^{-1}(u_\varepsilon(f(x_0)))$总包含$A$中点$x_0$的某个$\delta$-邻域，即$u_\delta(x_0)$，则称$f$在点$x_0$是连续的。相应地也可定义连续函数。

下面我们介绍一下一致连续的概念。

定义2 设f：$A\to R$，如果对于任意给定的正数ε，存在只依赖于ε的$\delta=\delta(\varepsilon)$，使得$A$中的任何两点$x_1$，$x_2$，只要$|x_1-x_2|<\delta$时，都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

一致地成立，则称f在A上是一致连续的，或者称f是一致连续函数。

下面我们把连续函数在闭区间上的性质用更一般的形式（推广到紧集上）列举如下，证明可参阅任何一本数学分析教程。

定理1 设A是R中的紧集，f：$A\to R$是连续函数，则$f(A)$是R中的紧集。换句话说，连续函数总是把紧集映射为紧集。

定理2 （介值定理）设f：$[a.b]\to R$是连续函数，则f在$[a.b]$上取得$f(a)$与$f(b)$之间的一切值。

定理3 设A是非空紧集，f：$A\to R$是连续函数，则

（1） f是有界的。

（2） f取到最大值与最小值。

（3） f是一致连续的。

§Ⅱ·2 函数列的收敛与一致收敛概念

本节介绍一下函数列的收敛与一致收敛的概念。

定义1 设f_n：$A\to R$（$n=1,2,\cdots$），f：$A\to R$，如果对每个固定的$x\in A$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

则称函数列$\{f_n\}$收敛于f，f称为$\{f_n\}$的极限函数。

用ε—N形式，可描述如下：

对于任意给定的正数ε，存在着自然数N，使得当$n>N$时，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

定义2 设f_n：$A\to R$（$n=1,2,\cdots$），f：$A\to R$，如果对于任意的正数ε，存在着自然数$N=N(\varepsilon)$（只依赖于ε），使得当$n>N$时，对一切$x\in A$都一致地有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称函数列$\{f_n\}$是一致收敛于f的，或称$\{f_n\}$在A上一致收敛于f。记为

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\xlongequal{\text{一致}}f(x) \qquad (x\in A)$$

或记为　　$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$　　　　　　$(x \in A)$

显然，当f_n一致收敛于f时，f_n必收敛于f，但反之未必成立。

一般说来从定义出发判定函数列是否一致收敛是不方便的，为此，我们介绍如下常用的一致收敛的判定法则。

定理　设$f, f_n: A \to R$，则f_n一致收敛于f的充要条件是

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

〔证明〕　必要性：设f_n一致收敛于f，则对于任意的正数ε，存在$N = N(\varepsilon)$，使得当$n > N$时，对一切$x \in A$都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

因此，　　$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

即　　$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

充分性：设　$\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

则对任意给定的正数ε，存在N，使得当$n > N$时，都有

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

因此，对任何$x \in A$，成立

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

也即f_n一致收敛于f。　　　　　　　　　　〔证毕〕

例1　　设$f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$，$x \in [0,1]$

易知　　$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0, x \in [0,1]$

也即$f_n(x)$的极限函数是$[0,1]$上的零函数，根据定理，易知

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$$

所以，f_n是一致收敛于0的。

例2 设$f_n(x)=x^n$　　$x\in[0,1]$

易知　$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$$

但$f_n(x)$不是一致收敛的。

因为　$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1$$

附录Ⅲ 数集的测度与可测函数

测度概念在R中是长度概念的推广，在R^2中是面积概念的推广，而且可以越出R^n在抽象空间定义测度。测度论不只是近代积分论的基础，在其它数学分支里也有广泛的应用。

§Ⅲ·1 数集的测度

为了便于理解，我们着重介绍R中有界点集的勒贝格测度（简称测度），有关概念和结果容易推广到R^n中的点集上去。

简单直观地讲，R中集A的测度就是区间长度概念的推广，R^2（或R^3）中集A的测度就是区域面积（或体积）概念的推广。因此，对有界区间集：

$$A=(a,b)\text{或}[a,b],(a,b],\ [a,b)$$

把A的测度记为$m(A)$，自然应定义为它的长度：

$$m(A)=b-a$$

我们把这个测度——长度的性质归纳如下：

（1）集A的测度$m(A)$是一个实数，$m(A)\geqslant 0$；

（2）若$A_1\subset A_2$，则$m(A_1)\leqslant m(A_2)$；

（3）空集ϕ的测度为0，即$m(\phi)=0$；

（4）集的测度是有限可加的，即

$$\text{若}A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,\ \text{则}m(A)=\sum_{k=1}^{n}m(A_k)。$$

把以上有关长度（或面积、体积）的性质，推广到R中的一般集上，而引入测度的定义。下面我们分步骤给出有界集的测度定义：

定义1 非空有界开集G的测度$m(G)$规定为其所有构成区间的长度之和（若G有可列个构成区间，则因G有界，故$m(G)$是一正项收敛级数之和）。

显然有：

（1）$G_1 \subset G_2$（G_1，G_2都是有界开集），则有

$$m(G_1) \leqslant m(G_2)$$

（2）$m(G_1 \cup G_2) \leqslant m(G_1) + m(G_2)$

定义2 非空有界闭集F的测度$m(F)$：

设 $F \subset (A, B)$，则规定

$$m(F) = (B-A) - m((A, B)-F)。$$

这里因$(A, B)-F$是属于(A, B)的一个开集，

故

$$m((A, B)-F)$$

有意义，从而$m(F)$有意义，且有$m(F) \geqslant 0$，此外不难证明上述$m(F)$与(A, B)选择无关，又显然有：

（1）有限集是有界闭集，测度为0；

（2）若$F_1 \subset F_2$（F_1，F_2都是有界闭集），则有$m(F_1) \leqslant m(F_2)$（由定义1之（1）可得）。

（3）若有界闭集$F \subset$有界开集G，则有

$$m(F) \leqslant m(G)$$

由以上两个定义知，有界开集，有界闭集的测度都是一个非负实数。

下面我们论述任意有界集的测度问题：

我们知道，对任何一个非空有界集E，至少有一个包含

E的有界开集G存在（这只需取充分大的N，便知有$G=(-N, N)$，使$E\subset G$），又至少有一个非空的有界闭集F属于E（这只要取$x\in E$，令$F=\{x\}$，因单点集$\{x\}$是闭集，故结论成立）。由此便可借助开、闭集的测度定义来定义任意有界集的测度。

定义3 若E是任意的非空有界集，则称一切可能包含E的有界开集测度之下确界为E的外测度，记为$m^*(E)$，即

$$m^*(E)=\inf\{m(G)\,|\,G\text{为包含}E\text{的有界开集}\}$$

由于包含E的有界开集存在，又总有$m(G)\geqslant 0$，故此定义为合理的，且易见，对任何有界开集G，它的外测度$m^*(G)$总是等于它按定义1定义的测度$m(G)$。

我们注意到外测度的定义，实际上是相当于用圆外切多边形的面积来近似圆的面积。我们自然想到另一个办法——用圆内接多边形近似圆面积的办法。如果外测度表示的是从外面往里面挤的话，那末，下面引进的内测度就是从里面往外膨胀。

定义4 若E是任意的非空有界集，则称一切可能属于E的有界闭集的测度的上确界为E的内测度，记为$m_*(E)$，即

$$m_*(E)=\sup\{m(F)\,|\,F\text{为属于}E\text{的有界闭集}\}$$

由于属于E的非空有界闭集总是存在的及总有$m(F)\leqslant m(G)$（这里G是包含E的某个开集），故此定义为合理的，且易见，对任何有界闭集，它的内测度$m_*(F)$总是等于按定义2定义的测度$m(F)$。另外，由$F\subset E\subset G$推知$F\subset G$，故

$$m_*(E)=\sup\{m(F)\}\leqslant m(G)$$

从而有$m_*(E) \leqslant \inf\{m(G)\} = m^*(E)$，即

$$m_*(E) \leqslant m^*(E)$$

定义5 设E是任意有界集，若有$m_*(E) = m^*(E)$，则称E为可测集（勒贝格可测集），并称此$m_*(E)$与$m^*(E)$的共同值为E的勒贝格测度$m(E)$，简称为L-测度，即

$$m(E) = m_*(E) = m^*(E)。$$

容易证明

（1）有界开集、有界闭集都是定义5意义下的可测集，且测度值与原定义一致，

（2）若E_1，E_2可测，$E_1 \subset E_2$，则有

$$m(E_1) \leqslant m(E_2)\text{（单调性）}$$

（3）零测度（测度为零的可测集）的任何子集是零测度（完全性）。

关于L-可测集具有下列重要性质：

定理1 若E可测，(A, B)是任意开区间，则$(A, B) \cap E$，$(A, B) \cap CE$都可测

（证明略）

定理2 若E_1，E_2，…，E_n，…，是一列可测集$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$有界，则$E$也是可测集，且

$$m(E) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

特别，当$\{E_n\}$互不相交时，上式等号成立，即

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)$$

定理3 若$E_1,E_2,\cdots,E_n$，…是一列可测集，则交集$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$是可测集。

〔明证〕 因$E\subset E_1$，E_1有界，故$E\subset(A,B)$则，

$$(A,B)-E=(A,B)\cap CE=(A,B)\cap C\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

$$=(A,B)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}CE_n\right)$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}((A,B)\cap CE_n)$$

由定理2知$(A,B)-E$可测，从而

$$E=(A,B)-((A,B)-E)=(A,B)\cap((A,B)-E)^c$$

可测（由定理1）。另外，由于空集Φ可测，

于是 $$\bigcup_{n=1}^{N}E_n=\bigcup_{n=1}^{N}E_n\cup\Phi\cup\Phi\cup\cdots$$

故定理2对有限并成立。

又对可测集$E_1,E_2,\cdots,E_n$，存在(A,B)，使

$$E_1,E_2,\cdots,E_N\subset(A,B)$$

及

$$\bigcap_{n=1}^{N}E_n=\bigcap_{n=1}^{N}E_n\cap(A,B)\cap(A,B)\cap\cdots$$

故定理3对有限交成立。

又若E_1，E_2为可测集，取(A,B)，使$E_1,E_2\subset(A,B)$，则有

$$E_1-E_2=E_1\cap((A,B)-E_2)=E_1\cap((A,B)\cap CE_2)$$

可测。

例1 证明有界可列集$A=\{x_1,x_2,\cdots\}$是零测度集。

〔证明〕 令$E_n=\{x_n\}$（$n=1, 2, \cdots$），则E_n是可测集（单点集可测），且$m(E_n)=0$，由定理2知

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\text{可测，且}$$

$$m(A)=m(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)=0$$

由上例易知［0,1］中的全体有理数构成之集是可测集，测度为0；因而［0,1］中全体无理数构成之集也是可测集，测度为1。

以上我们只在有界集的范围内讨论了测度问题，现在把测度概念推广到一般情形。

设E是R上的一个数集，若对任何$x>0$，有界集$(-x,x)\cap E$可测，则称E为可测集，并称极限$\lim\limits_{x\to\infty}m((-x,x)\cap E)$（有限或$+\infty$）为$E$的测度，仍记为$m(E)$。

在此种可测意义下，定理1,2,3仍成立。

我们还须指出，R中可测集组成非常广泛的集类，我们就把这全体可测集组成的集类，称为可测集类，记为L。

由上述定理可知，在L中进行有限交并，可列交并、及

有限差的结果仍是可测集，即L对这些运算是封闭的。

因开集、闭集都是可测集，从开、闭集出发，经过上述运算可得到构造出极为复杂的集合组成的集合类。我们称此种集合类为波诺尔(Borol)集类，记为B，显然$B\subset L$。

定理4 设$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_v\subset\cdots$是$R$上一列"渐增"的可测集，则$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$是可测集，且

$$\lim_{n=\infty} m(E_n)=m(E)$$

〔证明〕 令$A=E_1$，$A_2=E_2-E_1,\cdots A_n=E_n-E_{n-1}\cdots$，则$\{A_n\}$互不相交，且

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

故

$$m(E)=m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}m(A_n)$$

$$=\lim_{N\to\infty}m(\bigcup_{n=1}^{N}A_n)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$$。〔证毕〕

定理5 设$E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$是$R$上一列"渐减"的可测集，$E_1$有界，则$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$是可测集，且

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n)=m(E)$$

〔证明〕 取$(A,B)\supset E_1$，则$(A,B)\supset E_n$（$n=1,2,\cdots$），$(A,B)\supset E$。

于是

$$(A,B)-E=(A,B)\cap CE=(A,B)\cap C\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

$$=(A,B)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}CE_n\right)$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A,B)\cap CE_n)$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}((A,B)-E_n)$$

令$(A,B)-E_n$为H_n，则$H_1\subset H_2\subset\cdots\subset H_n\subset\cdots$为一列渐增可测集，又

$$(A,B)-E=\bigcup_{n=1}^{\infty}((A,B)-E_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n$$

由定理4知$(A,B)-E$可测，从而E可测，且

$$m(H_n)=m((A,B)-E_n)\to m((A,B)-E)$$

此即

$$\lim_{n\to\infty}m(E_n)=m(E)$$ 〔证毕〕

注意：此定理的条件"E_1有界"是不可去掉的，如

$$[1,+\infty)\supset[2,+\infty)\supset\cdots\supset[n,+\infty)\supset\cdots$$

则 $m(E_n)=m([n,+\infty))=+\infty$

但 $m(E)=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(n,+\infty)\right)=m(\phi)=0$

故结论不成立。

最后，我们指出，虽然可测集的范围广泛，在实际应用问题碰到的各种有界集，几乎全都是可测集，但是不可测集也确实存在，这里就不再详述了。

§ Ⅲ·2　可测函数

还是由于建立L积分的需要，我们在本节中讨论一类重要的函数——可测函数。它也是从测度观点来研究函数时所必然要考虑的一类函数。它一方面和大家熟悉的连续函数有密切联系，另一方面又在应用上理论上成为足够广泛的一个函数类。当然，我们不可能作详细地论述，仅介绍一些我们必需了解的概念。

定义1　设$f(x)$是定义在可测集$E\subset R$上的实值函数，如果对于任何有限实数σ，E的子集

$$E(f>\sigma)=\{x\,|\,f(x)>\sigma,\ x\in E\}$$

都是可测集，则称$f(x)$是可测函数。

例1　零测度集E上定义的任何实值函数是可测函数。

〔证明〕因为对任何$\sigma\in R$，集

$$E(f>\sigma)=\{x\,|\,f(x)>\sigma,x\in E\}$$

是零测度的子集，故为可测集，从而$f(x)$是E上的可测函数。

例2　可测集E上定义的常值函数

$$f(x)=c$$

是可测函数。

〔证明〕　因为对任意的$\sigma\in R$，有

$$E(f>\sigma)=\{x\,|\,f(x)>\sigma,x\in E\}=\begin{cases}\Phi,\sigma\geq c\\ E,\sigma<c\end{cases}$$

故$E(f>\sigma)$可测，从而$f(x)$可测。

例3 设E是可测集，$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，E_i可测且互不相交（$i=1,2,\cdots n$），$f(x)$是定义在E上，且在各E_i上分别取常数C_i的函数(称为简单函数)，则$f(x)$是可测函数。

〔证明〕 因为对任何$\sigma\in R$，集

$E(f>\sigma)=\{x|f(x)>\sigma,\ x\in E\}$

或为空集，或为有限个E_i之并，故是可测集，从而$f(x)$是可测函数。

例4 定义在R上的连续函数$f(x)$是可测函数。

〔证明〕 对任何$\sigma\in R$，考察集

$$E(f>\sigma)=\{x|f(x)>\sigma,\ x\in E\}$$

若$E(f>\sigma)$是空集，则$E(f>\sigma)$可测，若$E(f>\sigma)$非空,则可通过证明$E(f>\sigma)$是一开集来证明它是可测的，证明如下：

对于任意$x_0\in E(f>\sigma)$，则$f(x_0)>\sigma$，由$f(x)$的连续性知,存在正数δ,当$x\in u_\delta(x_0)$时,有$f(x)>\sigma$,即$u_\delta(x_0)\subset E(f>\sigma)$，故$E(f>\sigma)$是一开集,因而是可测集，从而$f(x)$是可测函数。

定理1 设$f(x)$是定义在可测集E上的可测函数，则对任何$\sigma\in R$，集

$E(f\geqslant\sigma)=\{x|f(x)\geqslant\sigma,\ x\in E\}$

$E(f\leqslant\sigma)=\{x|f(x)\leqslant\sigma,\ x\in E\}$

$E(f=\sigma)=\{x|f(x)=\sigma,\ x\in E\}$

$E(a\leqslant f(x)\leqslant b)=\{x|a\leqslant f(x)\leqslant b,x\in E,\ a,b\in R\}$

都可测。

〔证明〕由

$$E(f \geqslant \sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > \sigma - \frac{1}{n})$$

$$E(f \leqslant \sigma) = E - E(f > \sigma)$$

$$E(f = \sigma) = E(f \geqslant \sigma) - E(f > \sigma)$$

$$E(a \leqslant f \leqslant b) = E(f \geqslant a) \cap E(f \leqslant b)$$

即知结论的正确。

定理2 设$f(x)$，$g(x)$是定义在可测集E上的 可 测 函数，则

$$kf(x), \quad f(x) \pm g(x), \quad |f(x)|, \quad f(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$$

都是可测函数。

定理3 设$\{f_n(x)\}$是可测集E上一列(或有限个)可 测函数，则

$$M(x) = \inf_n f_n(x) \text{ 与 } \lambda(x) = \sup_n f_n(x)$$

都在E上可测。

定理4 设$f(x)$，$g(x)$是定义在可测集E上 的 可 测 函数，则$\max(f, g)$与$\min(f, g)$可 测，特 别$f^+ = \max(f, 0)$，$f^- = -\min(f, 0)$亦都可测。

下面我们再介绍两个有用的概念。

1° 关于“几乎处处”的概念。

设E是一可测集，P是一个确定在E上的数学命题（如连续、可导、收敛等等）。

(1) 若P在E的每一点成立，则称P在E上成立。

(2) 若P在E的“绝大部分”点上成立，仅可能在某零测度子集上不成立，确切地说，若存在$E_0\subset E$，$m(E_0)=0$，使P在$E-E_0$上成立，则称P在E上几乎处处成立。记为P在E上$a.e$。

注意，因空集ϕ是零测度集，故P在E上成立，也可说P在E上几乎处处成立，但反之未必。

例1
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

则$f(x)$几乎处处为0，记为$f(x)\overset{a.e}{=}0(x\in R)$。

例2 $f(x)=\sin x$则$f(x)$几乎处处不为0，记为$f(x)\overset{a.e}{\neq}0(x\in R)$

例3 $f(x)=\text{tg}x$则$f(x)$几乎处处连续，记为$f(x)$连续(a.e于R)。

例4 设$f(x),g(x)$是E上可测函数，则
$$f(x)\overset{a.e}{=}g(x)\qquad(\text{在}E\text{上})$$
表示$f(x)$与$g(x)$在E上几乎处处相等。

2° 关于按测度收敛的概念

关于“函数列$\{f_n(x)\}$收敛”的概念，已知三种含义，即

(1) $\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于$f(x)$，

(2) $\{f_n(x)\}$在E上处处收敛于$f(x)$，

(3) $\{f_n(x)\}$在R上几乎处处收敛于$f(x)$。

且有关系(1)⇒(2)，(2)⇒(3)

下面我们再给出一种更弱的“按测度收敛”的定义。

定义 设$f(x)$，$\{f_n(x)\}$是定义在E上的可测函数与可测函数列，若对于任何$\sigma>0$，集

$E_n(\sigma)=\{x||f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma, x\in E\}$ $(=1,2,\cdots)$的测度$m(E_n(\sigma))\to 0(n\to\infty)$，则称$\{f_n(x)\}$按测度收敛于$f(x)$，记为

$$f_n(x)\xrightarrow{(m)}f(x)$$

定理5 若$m(E)<+\infty$，$f_n(x)\xrightarrow{a.e}f(x)$，则

$$f_n(x)\xrightarrow{(m)}f(x)$$

〔证明〕 反证法。假如定理结论不成立，则存在$\sigma>0$使$m(E_n(\sigma))>0$(即存在$\varepsilon_0>0$及$\{m(E_{n_k}(\sigma_0))\}\subset\{m(E_n(\sigma_0))\}$使$m(E_{n_k}(\sigma_0))\geqslant\varepsilon_0(k=1,2,\cdots)$)

现只需证明存在E的子集$A\subset E$，$m(E)>0$，$\{f_n(x)\}$在A上不收敛于$f(x)$即可，证明如下：

因为

$$E_{n_k}(\sigma_0)=\{x||f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\sigma_0,\ x\in E\}$$

令 $R_m(\sigma_0)=\bigcup_{k=m}^{\infty}E_{n_k}(\sigma_0)$，则

$$R_1(\sigma_0)\supset R_2(\sigma_0)\supset\cdots\supset R_n(\sigma_0)\supset\cdots$$

$$m(R_1(\sigma_0))<+\infty$$

$$m(R_n(\sigma_0))\geqslant m(E_{n_n}(\sigma_0))\geqslant\varepsilon_0$$

令 $A=\bigcap_{m=1}^{\infty}R_m(\sigma_0)$，则由§Ⅱ·1定理5，知

$$m(A)=\lim_{n\to\infty} R_m(б_0)\geqslant\varepsilon_0>0,$$

且对任何$x\in A$，有$x\in R_m(б_0)(m=1,2,\cdots)$，从而存在

$$\{E_{n_{k_l}}(б_0)\}\subset\{E_{n_k}(б_0)\}$$

使 $\quad x\in E_{n_{k_l}}(б_0)\qquad(l=1,2,\cdots)$

即有 $\quad |f_{n_{k_l}}(x)-f(x)|\geqslant\sigma_0$，故$\{f_n(x)\}$在$A$上不收敛

于$f(x)$，这与$f_n(x)\xrightarrow{a.e}f(x)$相矛盾。〔证毕〕

附录Ⅳ 勒贝格(Lebesgue)积分

我们熟知，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(也称黎曼(Riemann)积分或简称为R积分)能解决很多的实际问题,但随着科学技术的日益发展,越来越显得很多不足之处,首先由于它要求$f(x)$在$[a,b]$有定义且要求$f(x)$有“较好的连续性,例如象很简单的狄里克勒(Dicichle)函数在$[0,1]$上R-不可积,就可积来看，R—积分不够广泛，致使它在实用上存在很大的局限性；另外它在理论上，由于条件要求过严，所以也存在一些弱点，如① $[a,b]$ 上R-可积函数列的极限函数不一定是R-可积，因此求极限$\lim\limits_{n\to\infty}$与求积分$\int_a^b$两种运算,需要很强的条件才能交换运算次序；②从牛顿——莱布尼兹公式看，通常是在函数$f(x)$有连续导数的假定下证明，但至少要求$f'(x)$为R-可积才行；③$[a,b]$上R-可积函数的全体，按照一种很自然的距离：

$$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

成为一个“不完备”的空间，即存在这样的R可积函数列$\{f_n(x)\}$，虽然

$$d(f_n,f_m)=\int_a^b |f_n(x)-f_m(x)|\mathrm{d}x \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

（是一个基本点列），但无R可积函数$f(x)$满足条件

$$d(f_n,f)=\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\to0\quad(n\to\quad)$$

（这一点将会在第三章中弄清楚）。这是R一积分最致命的弱点。

随着现代科学的发展，人们越来越迫切地感到需要有一种应用范围更广的，性质更好的，运算方便更灵活的新积分，同时用在原来特定条件下，还应与原定义的结果一致（按原定义可积时，按新定义应可积，且应有相同的积分值），这就是现代积分理论产生的实际背景。直到1902年法国数学家勒贝格才成功地引入了一种新积分，后人称之为勒贝格积分，由于它在很大程度上摆脱了上述R积分的困境，而且大大地扩大了可积函数的范围，所以今天已成为分析数学中不可缺少的工具。我们在下面主要就是介绍这一积分概念，为区别于R积分，今后将勒贝格积分简记为L积分。

在介绍勒贝格积分之前，我们先将它的前身——黎曼积分作一回顾。

§ Ⅳ·1　黎曼（Riemann）积分定义

R积分通常有两种定义，其一是大家熟知的“极限式”定义（即作为积分和的极限——一般高等数学中所采用的），另一是“确界式”定义。现介绍R积分“确界式”定义如下。

定义　设$f(x)$定义在$[a,b]$上有界函数，T表示$[a,$

$b]$ 的任一分割

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

这里n为任一自然数，可随T而不同。

设M_i，m_i分别表示$f(x)$在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上，下确界($i=1,2,\cdots,n$)，即

$$M_i=\sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x),\quad m_i=\inf_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x)$$

作积分大和与小和：

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,\quad s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

这里$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$。

令
$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\inf_T S$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\sup_T s$$

分别叫做$f(x)$在 $[a,b]$ 上的达布(Darbeux)上积分与下积分，这里上、下确定界是对 $[a,b]$ 的一切可能分割 T 而取的。

可以证明总有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

如果

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

则称$f(x)$在 $[a,b]$ 上R可积并称此共同值为$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的R积分，记为

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

关于R积分，我们只介绍它的定义，目的是好与L积分定义作出对比，至于有关它的性质与理论就不在此一一叙述了。

§ Ⅳ·2 勒贝格积分定义

L积分有不止一种的定义方法，为了便于同R积分比较，我们将采用和R积分确界式定义相当的定义。

定义 设$f(x)$是定义在R中测度有限的集E上的有界函数，D表示对E的任一分割：

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i\ (E_i\text{为}E\text{的互不相交的可测子集})。$$

设M_i，m_i分别表示$f(x)$在E_i上的上，下确界($i=1$，$1,\cdots,n$)。即

$$M_i=\sup_{x\in E_i}f(x),\quad m_i=\inf_{x\in E_i}f(x)$$

作积分大和与小和

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i m(E_i),\quad s=\sum_{i=1}^{n} m_i m(E_i)$$

令

$$\overline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x=\inf_D S$$

$$\underline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x=\sup_D s$$

分别称为$f(x)$在E上的(L)上，下积分。

可以证明总有

$$\underline{\int_E} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x$$

如果

$$\underline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x$$

则称$f(x)$在E上L可积，且称此共同值为$f(x)$在E上的勒贝格积分，记为

$$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

以上是R中测度有限可测集上有界函数的L积分定义，我们看到它在形式上同R积分完全类似，除了"积分区域"更一般外，主要不同之处在于采用的测度和分割的不同，在那里是区间在这里一律换成L可测集。下面我们证明，若$f(x)$

在 $[a,b]$ 上R可积，则$f(x)$在 $[a,b]$ 上也一定L可积。

我们用T表示 $[a, b]$ 的一切“子区间式”的分割的全体，用D表示 $[a,b]$ 的一切“可测子集式”的分割的全体，因$T\subset D$，于是有

$$\sup_T s\leqslant\sup_D s\leqslant\inf_D S\leqslant\inf_T S$$

即

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\underline{\int}_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int}_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

故由

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

可推知

$$(L)\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

因此，我们今后在计算$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$时，若能用熟知的方法(牛莱公式)求得$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则可大胆使用熟知的方法求解。但须注意的是，有时即使$(R)\int_a^b f$

$(x)\mathrm{d}x$不存在,(但$(L)\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$仍有可能存在。

定理1 一切有界可测函数都是L可积的。

〔证明〕 设$f(x)$是可测集$E(m(E)<\infty)$上的有界可测函数：$A\leqslant f(x)\leqslant B(x\in E)$时。要证

$$\underline{\int}_E f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int}_E f(x)\mathrm{d}x$$

作区间 $[A,B]$ 的任一分割$\mathscr{T}$：

$$A=y_0<x_1<y_2<\cdots<y_n=B,$$

令$\lambda=\max(y_i-y_{i-1}),E_i=\{x\mid y_{i-1}\leqslant f(x)\leqslant y_i,$

$x\in E\}$，则$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$是$E$的一个可测子集式分割（$D$

型分割)。

令，$m_i=\inf\limits_{x\in E} f(x)\geqslant y_{i-1},M_i=\sup\limits_{x\in E_i} f(x)\leqslant y_i$，得

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}m(E_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n} m_i m(E_i)\leqslant\underline{\int}_E f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\overline{\int}_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n} M_t(mE_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i)$$

又由

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n} y_i mE(_i)-\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}m(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{i-1})m(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda m(E_i)$$

$$= \lambda m(E)$$

由于$\lambda>0$的任意性，得

$$\underline{\int}_E f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int}_E f(x)\mathrm{d}x$$ 〔证毕〕

定理1 给出了L可积函数的一个范围，由于不可测的有界函数“极少”，故L可积函数的范围很大，例如处处不连续的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

便是一个L可积函数，由定义可直接算得

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

我们顺便指出：定理1的逆定理也是成立的。即定义在可测集E上的有界函数，若它是L可积的，则必定是可测的(证明从略)。

另外，如同黎曼积分一样，勒贝格积分也可以用一种“和式极限”形式表示出来，我们有

推论 设$f(x)$是可测集E上的有界L可积函数：

$$A\leqslant f(x)\leqslant B \qquad (x\in E),$$

$$A=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=B$$

是〔A，B〕的任一T型分割，

$$E_i=\{x \mid y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i,\ x\in E\}$$

$\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i - y_{i-1})$，$\xi_i \in E_i$任意，则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(E_i) \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 1)$$

证明 由定理1之逆知，$f(x)$是E上的有界可测函数，此时，E_i是E的可测子集，又由

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i m(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(E_i)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i m(E_i) \leqslant \sum_{i=1} y_i m(E_i)$$

可知$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(E_i)$存在，且等式(Ⅳ·1)成立。

反之，设$f(x)$是可测集E上的有界函数，若上述极限

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) m(E_i)$总存在，则$f(x)$为$L$可积，且等式(Ⅳ·1)成立(证明略)。

在有些书中，也有用上述极限的存在性及等式(Ⅳ·1)来定义L积分，当然还有其它形式的定义，在这里就不一一介绍了，这些不同形式的定义从数学角度来看，都各有其优缺点。

以上仅仅限于在“积分区域”的测度有限，并且被积函数有界的情况下讨论L积分，原因只是在这种情况下大，

小和数才能保证是有限的。以下我们将"积分区域"的测度有限及被积函数的有界这两个限制去掉，使积分定义能适用于更加广泛的函数类。这一扩张将分两步来完成。

第一步，非负函数情形。

设$f(x)$定义在可测集$E\subset R$(不要求$m(E)<\infty$)上的非负实函数(不要求$f(x)$有界)。则E总可以用一列逐步扩大的测度有限的可测集E_n来逼近：

$$E_1\subset E_2\subset\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}E_n=E$$

同时$f(x)$总可用一列定义在E_n上而函数值随着n逐渐增大的有界函数$f(x)$来逼近：

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

例如取$f_n(x)=[f(x)]_n=\min\{f(x),\ n\}$

$$=\begin{cases} f(x), & 当f(x)\leqslant n \\ n, & 当f(x)>n \end{cases}$$

为了利用已知的L积分概念，我们还要求每个f_n在E_n上都是可测的，由于$E(f>6)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n(f_n>6)$，这也就是要求$f(x)$在$E$上是可测的。再由$\{E_n\}$和$\{f_n(x)\}$是单调列的原由，总有

$$0\leqslant\int_{E_1}f_1(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_2}f_2(x)\mathrm{d}x\leqslant\cdots$$

因此，

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f_n(x)\mathrm{d}x$必存在(可能是$+\infty$)。不仅如

此，我们还可以证明这一极限是不依赖于逼近列$\{E_n\}$和$\{f_n(x)\}$的选择而唯一确定的。而且，如果$m(E)<\infty$且$f(x)$在E上是有界的，则恰有以下等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

因此对于非负函数来说，我们自然给积分概念作如下的推广。

定义1 设$f(x)\geqslant 0$在可测集$E\subset R$上可测，这时我们定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f(x)]_n\mathrm{d}x$$

称为$f(x)$在E上的L积分。

第二步，一般函数(不限于非负)的情形。

令 $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$，$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$，则$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，不难看出，如果$f(x)$在E上可测，$f^+(x)$与$f^-(x)$在E上也可测，反之亦然。并且对于测度有限的可测集E上的可积函数$f(x)$总有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

因此对于一般函数来说，我们自然给积分概念作如下推广。

定义2 设$f(x)$在可测集$E\subset R$上可测，如果在定义1的意义下的$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$与$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$不同时为$+\infty$，则我们称$f(x)$在E上积分確定，并定义$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$为$f(x)$在$E$上的$L$积分，特别当此积分有限时，称$f(x)$在$E$上$L$可积。

要注意，凡非负可测函数都是积分确定的，若积分有限，在此定义的意义下L是可积的。

又凡在测度有限的可测集上的可积函数，一定也是在此定义意义下L可积的。

§Ⅳ·3 勒贝格积分的性质及积分的极限定理

1.勒贝格积分的性质

由于L积分定义与R积分定义在形式上的相似，人们自然期待R积分的许多性质在L积分照样得到保留。在下面列举的性质中我们假设E是R中测度有限的可测集，$f(x)$等函数是E上的有界函数，又L可积就简称可积。

1° 设$f(x)$在E上可积，则$f(x)$在E的任何可测子集上也可积。

又设$f(x)$定义于$E=E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2=\phi$且在A，B上分别可积，则$f(x)$在E上也可积分，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x \quad (\text{Ⅳ}.2)$$

2° 设$f(x)$，$g(x)$在E上可积，则$f(x)+g(x)$在E上也可积，且

$$\int_E [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x \quad (\text{Ⅳ}.3)$$

3° 设$f(x)$在E上可积，则对任何常数C，$Cf(x)$也在E上可积，且

$$\int_E Cf(x)\mathrm{d}x=C\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

4° 设$f(x),g(x)$在E上可积，且$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

特别当$a\leqslant f(x)\leqslant b$时，有$am(E)\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant bm(E)$。

5° 设$f(x)$在E上可积，则$|f(x)|$在E上也可积，且

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E|f(x)|dx$$

6° 设$f(x)$在E上可积，$f(x)\geqslant 0$且$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，则$f(x)=0$ $a.e$于E。

7° 设$f(x)$在E上可积，则对任何可测集$A\subset E$，有

$$\lim_{m(A)\to 0}\int_A f(x)\mathrm{d}x=0$$

（这一性质称为L积分的绝对连续性）。

以上性质的证明从略。

2. 积分的极限定理

这里我们将主要介绍积分与极限的交换问题，我们将看到这问题在L积分范围内得到比在R积分范围内远为完满的解决，这正是L积分的最大成功之处。

定理1 （勒贝格控制收敛定理）设

(1) $\{f_n(x)\}$是可测集E上的可测函数列；

(2) $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ $a.e$于E，$n=1,2,\cdots$且$F(x)$在E上可积（称$\{f_n(x)\}$为$F(x)$所控制，而$F(x)$叫控制函数）；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\overset{a.e}{=\!=}f(x)$

则$f(x)$在E上可积且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx$$

证明从略。

定理2 （列维(Levi)）设$\{f_n(x)\}$为可测集$E\supset R$上的一列非负可测函数，且在E上有$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$，$n=1,2,\cdots$,(单调列)令$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx$$

〔证明〕 首先，由于$\{f_n(x)\}$是单调列，所以

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$存在、可测且$f_n(x)\leqslant f(x)$、故由

性质4°，$\int_E f_n(x)\,dx\leqslant\int_E f(x)\,dx$，从而得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx\leqslant\int_E f(x)\,dx$$

其次为了得到相反的不等式，对于固定的$N>0$，考虑可测函数列

$[f_N(x)]_N$，$[f_{N+1}(x)]_N,\cdots$ $[f_n(x)]_N$，$\cdots$在E_N上它们有定义而且应有

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x)]_N=[f(x)]_N \tag{4·4}$$

因此

$$\int_{E_N}[f(x)]_N\,dx=\int_{E_N}\lim_{n\to\infty}[f_n(x)]_N\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{E_N} [f_n(x)]_N dx \leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

(第二等式由控制收敛定理得知)。

故有 $$\int_E f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} [f(x)]_N dx$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

所以得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$ 〔证毕〕

定理3 (L逐项积分定理)设$\{f_n(x)\}$是可测集$E\subset R$上一列非负可测函数，则

$$\int_E (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)dx$$

〔**证明**〕设$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x), n=1,2,\cdots$，则$\{g_n(x)\}$为$E$上非负可测函数的递增序列，由列维定理有

$$\int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)dx$$

$$(\text{Ⅳ}\cdot 5)$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\int_E g_n(x)\mathrm{d}x$

$= \sum\limits_{i=1}^{n}\int_E f_i(x)\mathrm{d}x$,代入(Ⅳ·5)式即得。 〔证毕〕

定理4 设$\{f_n(x)\}$是可测集$E\subset R$上一列非负可测函数，并且

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) \qquad (x\in E)$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 6)$$

〔**证明**〕 设$g_n(x)=\inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots, \}$ $n=1,2,\cdots$则$\{g_n(x)\}$为E上非负可测递增函数列，且

$$g_n(x)\leqslant f_n(x) \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 7)$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 8)$$

由定理2，知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 9)$$

由(Ⅳ·7)式和(Ⅳ·8)即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

在结束本节之前，我们介绍一下关于L二重积分的化成累次积分的一个定理，即

定理5(富比尼Fubiui定理)

(1) 设$f(p)=f(x,y)$在$A\times B\subset R^2$(A，B分别为R中之可测集)上非负可测，则对$a.e$的$x\in A$，$f(x, y)$作为y的函数在B上可测，且

$$\int_{A\times B} f(P)\mathrm{d}p=\int_A \mathrm{d}x\int_B f(x, y)\mathrm{d}y \tag{Ⅳ·10}$$

(2) 设$f(P)=f(x,y)$在$A\times B\subset R^2$上可积，则对$a.e$的$x\in A$，$f(x,y)$作为y的函数在B上可积，又$\int_B f(x,y)\mathrm{d}y$作为x的函数在A上可积，且(Ⅳ·10)式成立。

同理，公式(Ⅳ·10)可换成

$$\int_{A\times B} f(P)\mathrm{d}p=\int_B \mathrm{d}y\int_A f(x,y)\mathrm{d}x \tag{Ⅳ·11}$$

推论 设 $f(P)=f(x, y)$在$A\times B\subset R^2$上L—可可积，则

$$\int_A \mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y=\int_B \mathrm{d}y\int_A f(x,y)\mathrm{d}x \tag{Ⅳ·12}$$

成立。

我们回忆一下，R积分理论中重积分化为累次积分所要求的条件要比L积分多，这是L积分的另一成功之处。

参 考 书 目

〔1〕 程其襄等，《实变函数与泛函分析基础》，高教出版社，1984年

〔2〕 夏道行等，《实变函数论与泛函分析》，高教出版社1985年

〔3〕 郑维行、王声望，《实变函数与泛函分析概要》，高教出版社，1980年

〔4〕 Erwin Kreyzsig，《Introductory Functinal Analysis With Applications》，1978年

〔5〕 柳重堪《应用泛函析》，国防工业出版社，1986年。

〔6〕 叶怀安，《泛函分析》，安微教育出版社，1984年

[General Information]
书名=应用泛函分析引论
作者=张鸣歧
页数=304
SS号=10099797
DX号=
出版日期=1989年04月第1版
出版社=北京理工大学出版社